



**TECNOLOGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ECATEPEC**  
**DIVISIÓN DE INGENIERÍA QUÍMICA Y BIOQUÍMICA**

**MATEMÁTICAS**  
**Curso Propedéutico**

**2005**



## ÍNDICE

**Pág.**

### **INTRODUCCIÓN**

|             |                          |    |
|-------------|--------------------------|----|
| UNIDAD I.   | Conjuntos                | 2  |
| UNIDAD II.  | Aritmética               | 9  |
| UNIDAD III. | Álgebra                  | 18 |
| UNIDAD IV.  | Trigonometría            | 54 |
| UNIDAD V.   | Graficación de Funciones | 69 |

## UNIDAD I. CONJUNTOS

**Definición:** Un conjunto es una colección de objetos bien definidos.

La forma de denotar un conjunto es a través de letras mayúsculas: A,B,C... Cada miembro de un conjunto se denomina elemento, simbólicamente tenemos:

$a \in A$  significa "a pertenece o es un elemento del conjunto A "

$b \notin A$  significa "b no pertenece al conjunto A "

Indica si es verdadero o falso las siguientes proposiciones.

$$1) 5 \in \{2,3,5\}$$

$$2) 7 \notin \{2,3,5\}$$

Generalmente un conjunto se representa de dos maneras:

i) ...Listando los elementos separados por comas y encerrándolos entre llaves (Método de Listado)

Ejemplo:

$$R = \{-1,1\}$$

$$N = \{1,2,3,4,5,6, \dots\}$$

$$V = \{a,e,i,o,u\}$$

ii) Escribiendo entre paréntesis la regla que determina a los elementos del conjunto (Método de la regla)

Ejemplo:

$$R = \{x / x^2 - 1 = 0\} \text{ que se lee " R es el conjunto de las x's tal que } x^2 - 1 = 0 "$$

$\uparrow$  tal que

$$N = \{x / x \text{ es un número natural}\}$$

$$V = \{x / x \text{ es una vocal}\}$$

**EJERCICIO I:** Escribanse los conjuntos siguientes con el método de lista.

$$1) \{x \mid x-8=0\}$$

$$2) \{x \mid x^2 - 4=0\}$$

$$3) \{x \mid x \text{ es un número primo entre } 1 \text{ y } 9\}$$

$$4) \{x \mid x+3=6\}$$

$$5) \{x \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$$

**Conjunto Vacío**

Un conjunto sin ningún elemento se denomina conjunto vacío Simbólicamente

$\emptyset$  representa el conjunto vacío ó nulo

**Subconjuntos .**

Definición: Decimos que A es subconjunto del conjunto B si todo elemento de A, también esta en B y se denota:

$A \subset B$ .

EJEMPLO:

Sean:  $A = \{2, -3, 1, 3\}$  y  $B = \{2, -3, 1\}$ . Tenemos que  $A \not\subset B$  "A no es subconjunto de B" ya que  $3 \notin B$ . En cambio  $B \subset A$ .

Observación: El conjunto vacío  $\emptyset$  es subconjunto de cualquier conjunto. Dado que  $\emptyset$  no tiene elementos.

EJERCICIO :

a) Sean:  $M = \{-4, 6\}$ ,  $N = \{6, -4\}$  y  $P = \{-4\}$ . Indique si son verdaderas ó falsas las siguientes proposiciones.

1)  $P \subset N$       2)  $N \subset M$       3)  $\emptyset \subset P$       4)  $M \subset P$       5)  $P \subset M$

b) Si  $L = \{0, 1, 2\}$ ,  $R = \{1, 2, 0\}$  y  $T = \{0, 1, 4\}$ . Indique si son verdaderas ó falsas las siguientes proposiciones.

1)  $L \subset R$       2)  $R \subset T$       3)  $R \subset T$       4)  $\emptyset \subset T$

**Igualdad entre conjuntos.**

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos, y lo denotamos  $A = B$ .

Ejemplo:  $\{2, 5, 6, 7\} = \{6, 5, 2, 7\}$ . Son iguales ya que tienen los mismos elementos. Si dos conjuntos no son iguales los escribimos así  $A \neq B$ .

Observación: Un conjunto puede ser elemento de otro conjunto.

Ejemplos:  $\{\emptyset, 1, 2\}$ ,  $\{1, 2, \{1, 2\}\}$ ,  $\{2, 1, A\}$

Ejercicio : Si  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ ,  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  y  $D = \{\{1, 2, 3\}, 4, 5\}$

a) Indica si las siguientes proposiciones son falsas ó verdaderas.

- |                      |                  |                  |                          |
|----------------------|------------------|------------------|--------------------------|
| 1) $A \subset B$     | 2) $B \notin D$  | 3) $B \subset D$ | 4) $A \subset D$         |
| 5) $A \in D$         | 6) $C \subset D$ | 7) $B \subset A$ | 8) $\emptyset \subset B$ |
| 9) $\emptyset \in C$ |                  |                  |                          |

b) Indique si son falsas ó verdaderas las siguientes proposiciones.

- |                                  |                                |                        |
|----------------------------------|--------------------------------|------------------------|
| 1) $\emptyset \subset \{2,3,4\}$ | 2) $\emptyset = \{\emptyset\}$ | 3) $\emptyset = \{0\}$ |
| 4) $\{3,5\} \in \{2,3,5\}$       | 5) $\{1,2\} \subset \{2,3,1\}$ |                        |

### Conjunto Universo

Se define como conjunto universo como aquel que contiene todos los elementos del problema a tratar, y lo denotamos como;

Conjunto Universo;  $U$  o bien  $\Omega$

Observación: El conjunto universo no es único, ya elegido no se cambia durante el desarrollo del problema

### Operaciones Con Conjuntos

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos cualquiera y  $U$  un universo que los contiene. Entonces:

Definición:

i) La **UNION** de  $A$  y  $B$  que se denota  $A \cup B$ , es el conjunto de todos los elementos de  $A$  y todos los elementos de  $B$  reunidos en un solo (sin repetirlos). En símbolos

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

ii) La **INTERSECCION** de  $A$  y  $B$ , denotada como  $A \cap B$ , es el conjunto de elementos comunes entre  $A$  y  $B$ . Simbólicamente.

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Nota: Si  $A \cap B = \emptyset$  se dice que los conjuntos  $A$  y  $B$  son ajenos.

iii) La **DIFERENCIA** de A y B, denotada A-B o A/B, es el conjunto formado por los elementos que están en A pero que, a la vez no están en B. simbólicamente.

$$A-B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

iv) El **COMPLEMENTO** de A denotado como A' ó  $A^c$ , es el conjunto  $U - A$  simbólicamente.

$$A^c = \{x \mid x \in U \text{ y } x \notin A\}$$

Ejemplos:

Considere los conjuntos .

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{3, 4, 5, a, b\}, \quad C = \{5, a, b\} \quad \text{y} \quad D = \{3, 4, c, d, 9\}$$

y todos dentro del universo  $U = \{1, 2, 3, \dots, 10, a, b, c, \dots, h\}$ . Entonces:

1.  $B \cup A = \{3, 4, 5, a, b, 1, 2\}$
2.  $C \cup B = \{3, 4, 5, a, b\}$
3.  $A \cap B = \{3, 4, 5\}$
4.  $C \cap D = \emptyset$
5.  $B \cap C = \{5, a, b\}$
6.  $A - D = \{1, 2, 5\}$
7.  $C - B = \emptyset$
8.  $B - C = \{3, 4\}$
9.  $D - B = \{c, d, 9\}$
10.  $D = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, a, b, e, f, g, h\}$
11.  $B = \{1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, c, d, e, f, g, h\}$
12.  $(C \cap D) \cup A = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$
13.  $B \cap (D \cup A) = \{3, 4, 5\} \cap \{3, 4, c, d, 9, 1, 2, 5\} = \{3, 4, 5\}$
14.  $A - (C \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{5, a, b\} = \{1, 2, 3, 4\}$
15.  $(A \cup B)^c = \{1, 2, 3, 4, 5, a, b\}^c = \{6, 7, 8, 9, 10, c, d, e, f, g, h\}$

Ejercicio I:

$$\text{Si } A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{2, 4, a, b\}, \quad C = \{a, c, 1, 5\}, \quad D = \{4, a, h\},$$

$$E = \{7, 8, p, q\}, \quad F = \{2, a\}$$

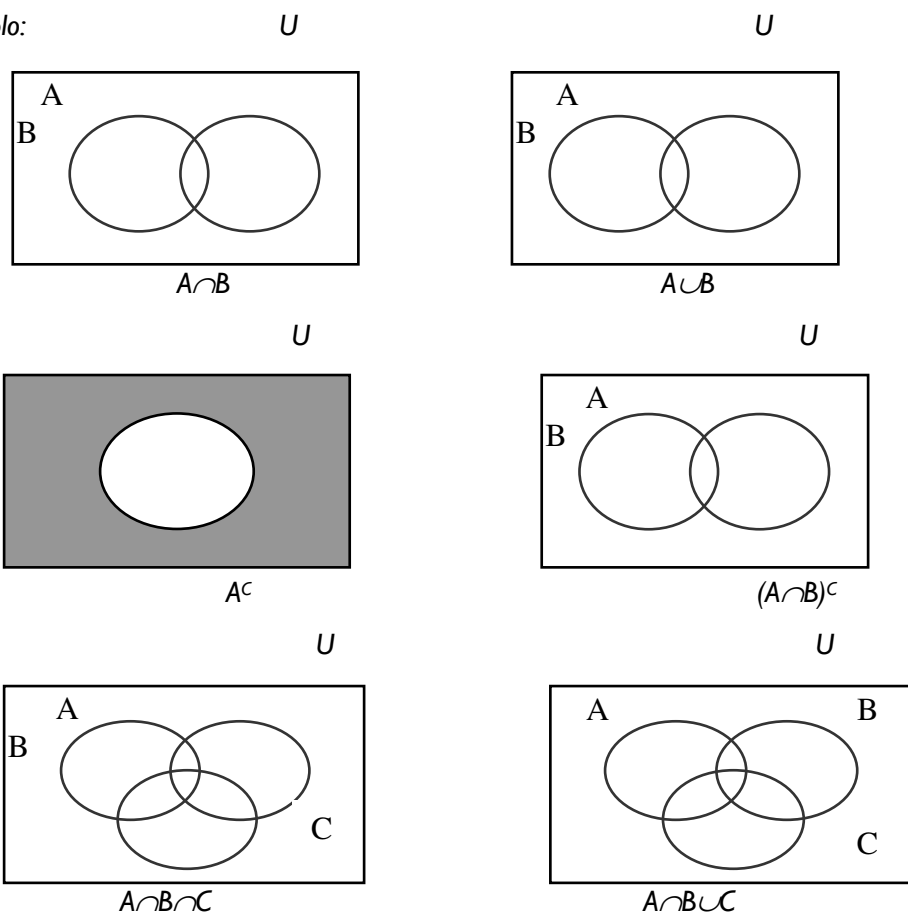
$$G = \{1, 2, 4, a, b, c\}, \quad H = \{3, 2, 4, 1\} \text{ y } U = \{1, 2, 3, \dots, 10, a, b, c, d, p, q\}$$

Hallar:

- |                           |                                 |  |
|---------------------------|---------------------------------|--|
| a) $(A \cup B) \cup C$    | b) $A - (B \cap C)$             | c) $A - B$                               |
| d) $B^c - A^c$            | e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ | f) $(A \cap B) \cap C$                   |
| g) $(A - B) \cap (A - C)$ | h) $B - A$                      | i) $(A \cap B) - [(A - C) \cup (B - C)]$ |
| j) $D - C$                | k) $F \cup (B \cup C)$          | l) $(G - B) \cup (A - H)$                |
| m) $A \cap H$             | n) $E - (B \cap D)$             | ñ) $B - (B - D)$                         |

Otra forma de presentar conjuntos es por medio de los llamados **DIAGRAMAS DE VENN**. Estos consisten de una curva cerrada, generalmente un círculo y se supone que sobre el área que encierra se localizan los elementos del conjunto representado

Ejemplo:



**Cardinalidad de un conjunto**

Con la notación  $n(A)$  indicó el número de elementos del conjunto  $A$ . Así, si

$$A = \{a, e, i, o, u\}.$$

$n(A) = 5$  esta cantidad es llamada cardinalidad de  $A$ .

Ejemplo:

En una encuesta que abarco 100 estudiantes, una compañía investigadora de mercados encontró que 73 estudiantes poseían un estéreo, 54 tenían bicicleta y 41 eran dueños de ambas cosas.

a) ¿Cuántos estudiantes poseen un estéreo o una bicicleta?

b) ¿Cuántos estudiantes no poseen ni estéreo ni bicicleta?

Solución: Los diagramas de Venn son muy útiles para este tipo de problemas. Si establecemos que:

$U = \{ \text{Estudiante de la muestra} \}$

$S = \{ \text{Estudiantes que tienen estéreo} \}$

$B = \{ \text{Estudiantes que tienen bicicleta} \}$

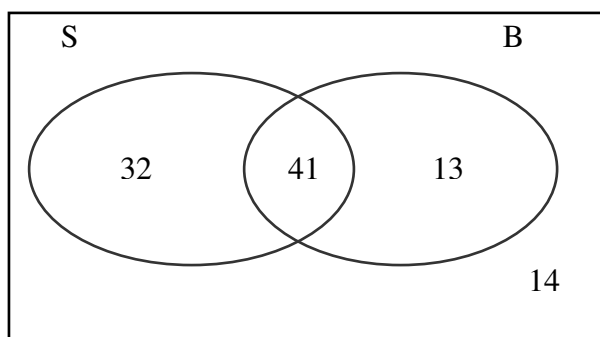
Entonces:

$$n(U) = 100$$

$$n(S \cap B) = 41$$

$$n(S) = 73$$

$$n(B) = 54$$



$$a) n(S \cup B) = 86$$

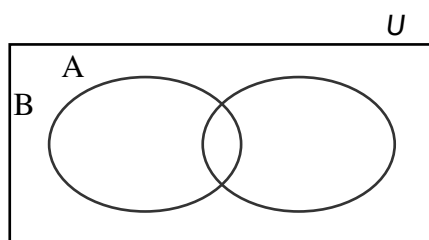
$$b) n(B \cup S) = 14$$



**Ejercicios 2:**

Los siguientes problemas se refieren al diagrama de Venn, que se muestra a continuación

a) ¿Cuántos elementos están en los conjuntos indicados?



- |          |                 |                    |
|----------|-----------------|--------------------|
| 1. $U$   | 5. $A \cap B$   | 9. $(A \cap B)^c$  |
| 2. $B$   | 6. $A \cap B$   | 10. $(A \cup B)^c$ |
| 3. $A^c$ | 7. $A^c \cap B$ | 11. $A^c \cap B^c$ |
| 4. $B^c$ | 8. $A \cap B^c$ | 12. $U^c$          |

b) El Departamento de Publicidad del “Palacio de Bronce” efectúa una encuesta a un grupo seleccionado de 1,000 clientes, de entre todos los que abrieron su cuenta de crédito en el pasado mes de diciembre. Se les pregunta si su crédito fue utilizado para comprar artículos para el hogar, artículos de vestir o juguetes. Los resultados de la encuesta se han tabulando así:

| Mercancía                                 | Número de personas |
|---|--------------------|
| Artículos para el hogar                   | 275                |
| Artículos de vestir                       | 400                |
| Juguetes                                  | 550                |
| Artículos para el hogar y de vestir       | 150                |
| Artículos para vestir y juguetes          | 250                |
| Artículos para el hogar y juguetes        | 110                |
| Artículos de vestir, del hogar y juguetes | 100                |

Se pregunta:

- ¿Cuántas personas no usaron su crédito en ninguna de esas 3 mercancías?
- ¿Cuántas personas utilizaron su crédito sólo para comprar artículos de vestir?, ¿Sólo para artículos del hogar?, ¿Sólo para juguetes?.

**SOLUCIONES.***Ejercicio 1*

- |                                   |                     |                              |
|-----------------------------------|---------------------|------------------------------|
| a) $\{1, 2, 3, 4, a, b, c, 5\}$   | g) A                | k) $\{2, 4, a, b, c, 1, 5\}$ |
| b) A                              | h) $\{a, b\}$       | l) $\{1, b, c\}$             |
| c) $\{1, 3\}$                     | i) $\{2, 3, 4, b\}$ | m) $\emptyset$               |
| d) $\{1, 3, 5\}$                  | j) $\{4, b\}$       | n) E                         |
| e) $\{2, 4, 1\}$ ñ) $\{4, a, b\}$ |                     |                              |

ñ)  $\{4, a, b\}$ *Ejercicio 2*

- |        |       |       |          |
|--------|-------|-------|----------|
| 1. 100 | 4. 48 | 7. 41 | 10. 20   |
| 2. 52  | 5. 80 | 8. 28 | 11. 20   |
| 3. 61  | 6. 11 | 9. 89 | 12. cero |

*Ejercicio 3*

- |        |                  |
|--------|------------------|
| 1. 185 | 2. 100, 115, 290 |
|--------|------------------|

**UNIDAD II. ARITMÉTICA****LOS NÚMEROS REALES****Números Naturales**

Desde antaño el ser humano se vio en la necesidad de contar y medir los objetos que se tenían. Para atender, este problema se crearon símbolos para representar cantidades, estos símbolos fueron muy diversos según la lectura.

Los mayas usaron los siguientes símbolos.

|     |     |      |        |       |      |        |
|-----|-----|------|--------|-------|------|--------|
| •   | ••  | •••  | ••••   | —     | —•   | =====  |
| uno | dos | tres | cuatro | cinco | seis | veinte |

Los romanos usaron la siguiente :

|     |     |      |        |       |      |        |           |
|-----|-----|------|--------|-------|------|--------|-----------|
| I   | II  | III  | IV     | V     | X    | XX     | L         |
| uno | Dos | Tres | Cuatro | Cinco | Diez | Veinte | Cincuenta |

Posteriormente los árabes usaron los símbolos que hoy en día usamos con mucha frecuencia.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \dots$

A este conjunto de números se le llaman números naturales y los representamos por la letra  $N$ , y también se le han denominado números enteros positivos.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

Si  $n$  representa un número natural, su antecesor está dado por  $n - 1$ , y su siguiente o sucesor estará determinado por  $n + 1$

Las operaciones que podemos realizar con estos números son Adición o Suma, y Multiplicación.

Pero no todas las restas, como la siguiente.

$$5 - 12 = ?$$

Para resolverla fue necesario ampliar el conjunto de los números naturales, agregando los números negativos y el cero, dando como resultado el conjunto de los números enteros ( $Z$ ).

$$Z = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \} , \text{ Donde } N \subset Z.$$

Así:  $5 - 12 = -7$

Con los números enteros se pueden resolver operaciones de adición, sustracción y multiplicación, pero no todas las divisiones, por ejemplo:

$$5 \div 2 = ?$$

Para solucionar este problema se amplió el conjunto de los enteros agregando los números racionales ( $\mathbb{Q}$ ).

Un número racional es de la forma  $\frac{a}{b}$ , con  $a$  y  $b \in \mathbb{Z}$  y  $b \neq 0$ . Llamado también fracción común, en donde  $a$  se llama numerador y  $b$  denominador.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ con } b \neq 0 \text{ y } a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

Con los números racionales podemos resolver problemas como el siguiente.

Una jarra contiene  $\frac{3}{4}$  de litro de leche y se quiere saber cuántos vasos de  $\frac{1}{5}$  de litro se pueden servir.

La respuesta la podemos obtener mediante la división de.

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{5} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Luego, se pueden servir tres vasos y las tres cuartas partes de otro.

Los números racionales se pueden expresar en forma decimal realizando la división del numerador entre el denominador.

$$\frac{3}{8} = .375$$

Existen fracciones que tienen la siguiente característica.

$$a) \frac{5}{9} = .555555 \dots$$

$$b) \frac{12}{7} = 1.71428571428571 \dots$$

Estas fracciones se llaman periódicas y se representan como:

$$a) .555555\dots = \overline{.5}$$

$$b) 1.71428571428571 \dots = 1.\overline{714285}$$

Existen números que, como los anteriores, son infinitos en la parte decimal pero no tienen periodo: Estos constituyen el conjunto de los números irracionales ( $\mathbb{Q}'$ ).

Por ejemplo:

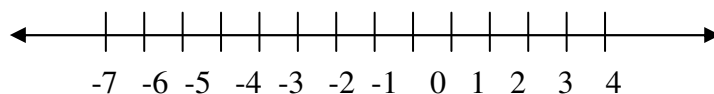
$$a) 1.41421356237\dots = \sqrt{2}$$

$$b) 3.14159265\dots = \pi$$

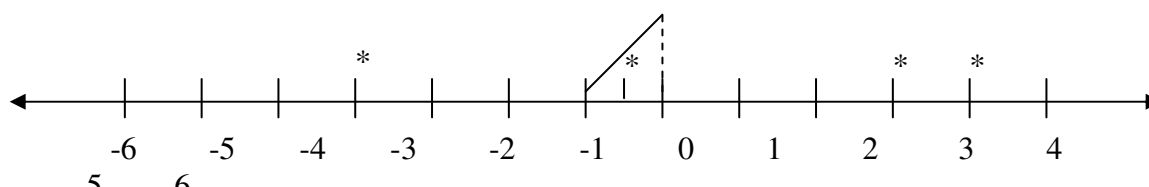
$$c) 56.7153110693524 \dots$$

## LA RECTA NUMERICA

El conjunto de los números reales puede ponerse en correspondencia de uno a uno con los puntos de una recta horizontal llamada recta numérica o recta de los números reales.



Localización de los números  $-3$ ,  $2/3$ ,  $4$  y  $5$ .



Localización de  $\sqrt{2}$ .

### Valor absoluto.

El valor absoluto de un número real  $a$  se denota  $|a|$  se define como:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0 \\ -a, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} |5| &= 5 \\ |-6| &= -(-6) = 6 \end{aligned}$$

El valor absoluto en la recta numérica es la distancia del número al origen.

### Múltiplos y Divisores.

Los números que contienen a otro, un número exacto de veces se llaman múltiplos.

Por ejemplo: Los múltiplos de 5 son.

$$5, 10, 15, 20, 25, \dots$$

Los números que caven un número exacto de veces en otro se llaman divisores.

Por ejemplo: Los divisores de 12 son.

1, 2, 3, 4, 6 y 12.

### **Números Primos.**

Los números que sólo son divisibles entre sí mismos y la unidad se llaman números primos.

Por ejemplo: los números primos menores que 100 son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Los números que no son primos se llaman compuestos y el 1 recibe el nombre de unitario porque solo es divisible entre el mismo.

Todo número compuesto se puede expresar como un producto de números primos.

Por ejemplo:

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

### **Criterios de divisibilidad**

**Divisibilidad entre 2.** Todo número en el que las cifras de las unidades sea par o cero es divisible entre dos.

**Divisibilidad entre 3.** Si la suma de las cifras de un número es múltiplo de tres, entonces ese número es divisible entre tres.

**Divisibilidad entre 4.** Todo número cuyas dos últimas cifras de la derecha formen un múltiplo de cuatro o sean cero son divisibles entre cuatro.

**Divisibilidad entre 5.** Todo número cuya cifra de las unidades sea cinco o cero, es divisible entre cinco.

**Divisibilidad entre 6.** Si la última cifra de la derecha de un número es par o cero y además, la suma de las cifras que lo forman es múltiplo de tres, entonces es divisible entre seis.

**Divisibilidad entre 8.** Un número es divisible entre ocho si las últimas tres cifras que lo forman son ceros o múltiplo de ocho.

**Divisibilidad entre 9.** Todo número que las sumas de sus cifras sea nueve o múltiplo de nueve es divisible entre nueve.

**Divisibilidad entre 10.** Todo número que en la última cifra de la derecha sea cero es divisible entre diez.

## MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el menor de los múltiplos comunes.

El m.c.m. puede obtenerse descomponiendo los números en sus factores primos como se muestra a continuación.

Ejemplo: Obtener el m.c.m. de 30 y 25.

|    |    |   |                                 |
|----|----|---|---------------------------------|
| 30 | 25 | 2 | 30 tiene mitad el 25 se baja.   |
| 15 | 25 | 3 | 15 tiene tercia, el 25 se baja. |
| 5  | 25 | 5 | 5 y 25 tienen quinta.           |
| 1  | 5  | 5 | 5 tiene quinta el 1 se baja.    |
| 1  | 1  |   | los unos indican el final.      |

La última columna de la derecha contiene los factores del m.c.m., entonces.

$$\text{m.c.m.} = 2 \times 3 \times 5^2$$

## MÁXIMO COMÚN DIVISOR

El máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números es el mayor de los divisores comunes.

El m.c.d. se obtiene multiplicando los factores primos comunes de menor exponente.

Ejemplo: Hallar el m.c.d. de 36 y 84.

|    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| 36 | 2 | 84 | 2 |
| 18 | 2 | 42 | 2 |
| 9  | 3 | 21 | 3 |
| 3  | 3 | 7  | 7 |
| 1  |   | 1  |   |

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$\text{m.c.d.} = 2^2 \times 3$$

Mediante la descomposición de factores primos puede calcularse el m.c.d., considerando solo los factores primo comunes de los números.

|    |    |   |         |   |
|----|----|---|---------|---|
| 36 | 84 | 2 | 36 y 84 | tienen mitad.   |
| 18 | 42 | 2 | 18 y 42 | tienen mitad.   |
| 9  | 21 | 3 | 9 y 21  | tienen tercia.  |
| 3  | 7  |   | 3 y 7   | ya no son divisibles entre un mismo número, terminamos. |

La última columna de la derecha contiene los factores primos del m.c.d., entonces:

$$\text{m.c.d.} = 2^2 \times 3 = 12.$$

**Propiedades de la igualdad:** Sean  $a, b$  y  $c \in \mathcal{R}$ .

1. Reflexiva: para toda  $a$ , entonces,  $a = a$ .
2. Simétrica: si  $a = b$ , entonces,  $b = a$ .
3. Transitiva: si  $a = b$  y  $b = c$ , entonces,  $a = c$ .
4. Sustitución: en una expresión matemática, una cantidad se puede sustituir por otra:  
 $a + 3 = 8$ , por lo tanto,  $a = 5$ .
5. Aditiva: si  $a = b$ , entonces  $a + c = c + b$  y  $c + a = c + b$
6. Multiplicativa : si  $a = b$ , entonces,  $ac = bc$  y  $ca = cb$ .

**Propiedades de las operaciones:** Sean  $a, b$  y  $c \in \mathcal{R}$ .

1. Conmutativa:  $a + b = b + a$ ,  $ab = ba$ .
2. Asociativa:  $a + (b + c) = (a + b) + c$ ,  $a(bc) = (ab)c$ .
3. Distributiva:  $a(b + c) = ab + bc$ .

**Propiedades de orden:** Sean  $a, b$  y  $c \in \mathcal{R}$ .

1. Transitiva: si  $a < b$  y  $b < c$ , entonces,  $a < c$ .
2. Tricotomía: se cumple una sola condición  $a < b$ ,  $a = b$ ,  $a > b$ .



3. *Aditiva:* si  $a < b$ , entonces,  $a + c < b + c$  y  $c + a < c + b$ .
4. *Multiplcativa:* si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces,  $ac < bc$  y  $ca < cb$ .
5. *Multiplcativa:* si  $a < b$  y  $c < 0$ , entonces,  $ac > bc$  y  $ca > cb$ .

## OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Las operaciones de dos números racionales se define como:

**Suma:**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

**Resta:**

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

**Multiplcatión:**

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

**División:**

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

*Ejemplo:* Determinar las cuatro operaciones antes mencionadas con  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{5}{3}$ .

*Suma*

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{3+10}{6} = \frac{13}{6}$$

*Resta*

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{3} = \frac{3-10}{6} = -\frac{7}{6}$$

*Multiplcatión*

*División*



$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} \div \frac{5}{3} = \frac{3}{10}$$

Realiza las siguientes operaciones.

$$1. \frac{5}{9} + \frac{3}{11} + \frac{5}{33} =$$

$$2. \frac{5}{16} - \frac{1}{7} - \frac{2}{21} =$$

$$3. \frac{3}{9} - \frac{3}{21} - \frac{3}{21} + \frac{2}{14} =$$

$$4. \frac{3}{4} - \frac{5}{7} + \frac{3}{14} - \frac{1}{32} =$$

$$5. \frac{3}{8} + \frac{5}{64} - \frac{3}{13} - \frac{4}{12} =$$

$$6. \frac{9}{5} \times \frac{2}{7} =$$

$$7. \frac{9}{5}(-5) =$$

$$8. \left(-\frac{11}{31}\right)\left(-\frac{19}{8}\right) =$$

$$9. \frac{13}{14} \div \left(-\frac{9}{7}\right) =$$

$$10. \left(-\frac{18}{22}\right) \div \left(-\frac{5}{14}\right) =$$

$$11. \frac{\frac{13}{5}}{\frac{5}{8}} =$$

$$12. -\frac{15}{16} \div (-11) =$$

$$13. \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{9} - \frac{2}{12}\right)\left(\frac{3}{4}\right) =$$

$$14. \frac{1}{19}\left(\frac{5}{8}\right) \div \frac{1}{4} =$$

$$15. \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{6}\right) + \frac{5}{4} - \frac{2}{8} =$$

$$16. \frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{5}{6}}} =$$

$$17. \frac{1 + \frac{2}{7}}{1 + \frac{\frac{2}{7}}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}} =$$

$$18. \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{16}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right] \div \frac{1}{7} =$$

$$19. \frac{6}{4} + \frac{2}{5}\left[\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{3}\right) - 2\right]$$

## UNIDAD III. ALGEBRA

### Exponentes

*A continuación se muestra la notación exponencial*

Si  $a \in \mathcal{N}$ :

$a^n$

**a.** Se le llama base

**n.** Exponente ó potencia ( $n \in \mathcal{N}$ )

Significado:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ veces}}$$

Donde  $a^0 = 1$

Ejemplos:

a)  $a^1 = a$

b)  $a^2 = a \cdot a$

c)  $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$

d)  $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

e)  $(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} =$

f)  $b^4 = b \cdot b \cdot b \cdot b$

Realiza los siguientes problemas como en el ejemplo anterior.

1)  $\left(\frac{1}{4}\right)^5 =$

2)  $\pi^6 =$

3)  $\text{Sen}^2 x =$

4)  $f^3(x) =$



5)  $\left(\frac{3}{4}\right)^4 =$

6)  $(\sqrt{5})^6 =$

7)  $(-1)^5 =$

8)  $(421)^0 =$

9)  $\left(\frac{-3}{a}\right)^2 =$

10)  $\left(\frac{a+b}{3}\right)^3 =$

11)  $(3 \operatorname{Sen} \theta)^2 =$

12)  $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3 =$

**Operación Entre Exponentes**

*Multipliación de potencias con bases iguales:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

*Ejemplo:*

a)  $2^6 \cdot 2^7 = 2^{6+7} = 2^{13}$

b)  $4^{1/3} \cdot 4^{1/4} = 4^{5/6}$

c)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x^{1/2} \cdot x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{1/2+1/2+1/2} = x^{3/2}$

*Simplifica las siguientes expresiones como en el ejemplo anterior.*

1)  $5^2 \cdot 5^4 =$

2)  $a^{3/2} \cdot a =$

3)  $2^{1/2} \cdot 2 \cdot 2^{3/2} =$

4)  $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}^2 x =$

5)  $f^2(x) \cdot f^3(x) \cdot f^2(x) =$

6)  $(mn)^2(mn)^3(mn)^{-1} =$

**División con exponentes**

*División de potencias con bases iguales*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a \neq 0$$

**Ejemplos:**

$$a) \frac{6^{20}}{6^{10}} = 6^{20-10} = 6^{10}$$

$$b) \frac{x^7}{x^2} = x^{7-2} = x^5$$

$$c) \frac{(mn)^6}{(mn)^3} = (mn)^{6-3} = (mn)^3 = m^3 n^3$$

$$d) \frac{16^{100}}{16^{20}} = 16^{80}; \quad \frac{\sqrt[6]{x}}{x^3} = \frac{x^{1/6}}{x^3} = x^{1/6-3} = x^{-17/6}$$

Simplifica las siguientes expresiones. Como en el ejemplo anterior.

$$1) \frac{m^6}{m^2} =$$

$$4) \frac{x^{1/3}}{x^2} =$$

$$7) \frac{mp}{(mp)^6} =$$

$$2) \frac{p^3}{p^7} 0 =$$

$$5) \frac{\sqrt[3]{2}}{2^3} =$$

$$8) \frac{(pqr)^5}{pqr} =$$

$$3) \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$6) \frac{a^6}{a^0} =$$

Observación: para todo número real  $a \neq 0$  y para todo  $m \in \mathcal{R}$

Ejemplo : a)  $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

$$b) a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

Simplifica las siguientes expresiones, como en el ejemplo anterior

**Ejemplo :**  $9^{-1/2} = \frac{1}{9^{1/2}}$   $\frac{1}{x^6} = x^{-6}$

1)  $1^{-10}$

2)  $6^{-100}$

3)  $71^{-99}$

4)  $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

5)  $\frac{1}{\sqrt[7]{mn}}$

6)  $\frac{1}{\sin x}$

7)  $\frac{1}{e^2}$

8)  $\frac{1}{(5+1)}$

### **Elevar una potencia a una potencia.**

Definición: Para todo número real  $a \neq 0$  y para cualesquiera números reales  $m$  y  $n$   $(a^m)^n = a^{mn}$

Esto se deduce de:  $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \dots a^m}_{n \text{ veces}} = a^{mn}$

### **Ejemplos:**

a)  $(3^6)^5 = 3^{30}$

b)  $(\sqrt{x})^3 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = x^{\frac{3}{2}}$

Simplificar:

1)  $(6^2)^2$

4)  $(\pi^{1/3})^3$

2)  $(a^6)^6$

5)  $(\sin^2 x)^3$

3)  $(e^3)^2$

6)  $(m^2)^4$

### **La potencia de un producto.**

Definición: Sean  $a$  y  $b$  números reales distintos de cero y  $n$  un número real

Ya que  $(ab)^n = a^n b^n$

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \dots ab}_{n \text{ veces}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots b}_{n \text{ veces}}$$

*Ejemplo:*

- a)  $(6x)^6 = 6^6 x^6$
- b)  $(3mn)^4 = 3^4 (mn)^4 = 3^4 m^4 n^4$
- c)  $(pqr)^9 = p^9 q^9 r^9$

*Simplificar:*

1)  $(4y^3)^4$

2)  $(6x^2 y z^3)^{-1/6}$

3)  $(-3my)^2$

4)  $(sprq)^{10}$

### **La potencia de un cociente**

Para todo par de números reales  $a$  y  $b \neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ donde}$$

ya que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots \frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{a \cdot a \cdot a \dots a}{b \cdot b \cdot b \dots b} = \frac{a^n}{b^n}$$

**Ejemplos:**

a)  $\left(\frac{a^6}{4}\right)^2 = \frac{a^{12}}{4^2}$

b)  $\left(\frac{x}{m}\right)^{-5} = \frac{x^{-0.5}}{m^{-5}}$

*Simplificar:*

$$1) \left( \frac{a^5}{4} \right)^3 =$$

$$2) \left( \frac{m}{n^6} \right)^{-6} =$$

$$3) \left( \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 =$$

$$4) \left( \frac{\pi^6}{t} \right)^6 =$$

$$5) \left( \frac{l}{-6} \right)^4 =$$

$$6) \left( \frac{rs}{m} \right)^{-3} =$$

$$7) \left( \frac{\pi^2}{e^{-2}} \right)^2 =$$

$$8) \left( \frac{\sqrt[3]{mn}}{\sqrt{m}} \right)^3 =$$

### **Multiplicación y división de monomios**

**Monomio:** Un monomio puede ser un número, una variable o producto de números y variables con números reales como exponentes.

Ejemplos:

$$4a, \quad -7ab, \quad \frac{1}{3}a^6, \quad 21ay$$

Ejemplos de **no monomios**:

$$\frac{1}{y}; \quad a + b; \quad x + \text{Sen}x$$

### **Multiplicación de monomios**

Podemos multiplicar monomios utilizando las propiedades de los números reales y las propiedades de los exponentes.

Ejemplos:

$$a) (3a)(-12) = -36a$$

$$b) (mn)(6) = 6mn$$

$$c) (x^2)(2y)(x) = x^2 \cdot x \cdot 2y = x^3 2y = 2x^3 y$$

Realice las siguientes multiplicaciones.



1)  $(3b^3)(5b^5) =$

5)  $(-x^3)(-x) =$

2)  $(-x^7)(5x^{12}) =$

6)  $(\text{Sen}x)(\text{Sen}^3x) =$

3)  $(6)(7x) =$

7)  $(4 \text{ Sen}x)(12) =$

4)  $(4a^4b^8)(2a^4b^2) =$

8)  $(3e)(12e^2) =$

**División de monomios**

Podemos dividir monomios utilizando las propiedades de los números reales y las propiedades de los exponentes.

Ejemplos:

a)  $\frac{x^6}{x} = x^{6-1} = x^5$

b)  $\frac{4xy^2}{2x^3y} = 2x^{1-3}y^{2-1} = 2x^{-2}y^1 = \frac{2y}{x^2}$

**Efectúe las siguientes divisiones**

1)  $\left(\frac{-6a^3}{6a}\right) =$

2)  $\frac{\sqrt{xy}}{x\sqrt{y}} =$

3)  $\frac{5a^{11}b^7}{-7a^5b^9} =$

4)  $\frac{15y^8}{3} =$

5)  $\frac{2x^{10}}{8x^5} =$

6)  $\frac{3mn^6}{9m^2n^2} =$

7)  $\frac{k^3}{3k^8} =$

**Polinomios**

**Definición:** Un polinomio con coeficientes reales es una suma de monomios o términos.

**Observación:**

Un polinomio con dos términos se le dice binomios

Un polinomio con tres términos se les dice trinomio

### Reducción de términos semejantes

Esta operación se realiza agrupando términos comunes, pudiendo utilizar la propiedad distributiva.

**Ejemplo:**

$$\begin{aligned} \text{a) } 2n^3 - 6n^3 &= (2-6)n^3 \\ &= -4n^3 \end{aligned}$$

Reducir términos semejantes.

$$1) \quad 2x - 4x^3 - 24 - 6x^3 =$$

$$3) \quad 8x^2y^2 - y^2 + y^3 - 1 - 4x^2y^2 =$$

$$2) \quad 7m^2 - m - m^2 - 7 =$$

$$4) \quad 4b^5 - 2ab^3 - b^5 + 7ab^3 =$$

### Grados y Coeficientes

El grado de un término es la suma de los exponentes de las variables. El grado de un polinomio es el grado más alto de sus términos.

**Ejemplos:**

$$8a^4b^2 \quad \text{grado} = 4 + 2 = 6$$

$$7 \quad \text{grado} = 0$$

$$6a^2b^2 + 3ab + 3 \quad \text{grado} = 4$$

### Suma de polinomios

La suma de polinomios se realiza sumando sus términos semejantes. (Se acostumbra arreglar los términos de un polinomio en cierto orden).

**Ejemplo:**

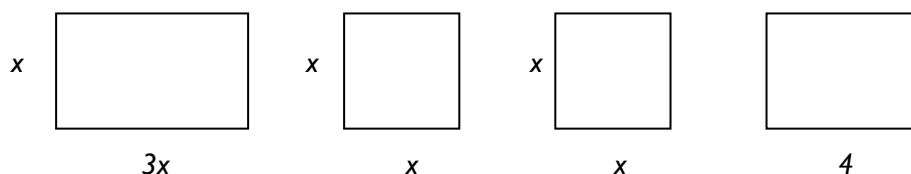
$$\begin{aligned} (2x^3 - x^2 + 3) + (x^3 + x - 2) &= 2x^3 - x^2 + 3 + x^3 + x - 2 \\ &= 3x^3 - x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 + 3 \\ x^3 + x - 2 \\ \hline 3x^3 - x^2 + x + 1 \end{array}$$

Realizar las siguientes sumas:

- 1)  $(3x + 2) + (-4x + 3) =$
- 2)  $(-4x^4 + 6x^2 - 3x + 5) + (6x^3 + 5x + 9) =$
- 3)  $(5x^3 + 6x^2 - 3x + 1) + (5x^4 - 6x^3 + 2x - 5) =$
- 4)  $(4x^5 - 6x^3 - 9x + 1) + (6x^3 + 9x^2 + 9x) =$
- 5)  $(3a^2b^5 - 2ab^3 + 1) + (\frac{1}{3}a^2b^5 + 5ab^3 - a^2b^2) =$

5.a) Expresar con un polinomio la suma de las áreas de los rectángulos siguientes:



- b) Encontrar la suma de las áreas cuando  $x = 3$
- c) Encontrar la suma de las áreas cuando  $x = 8$

### Resta de polinomios

Para realizar esta operación solo observemos:

**Ejemplo:**  $a - b = a + (-b)$

$$\begin{aligned} (3a^3 - a^2 + 4) - (a^3 + 2a^2 - 4) &= \\ &= 3a^3 - a^2 + 4 + [-(a^3 + 2a^2 - 4)] \\ &= 3a^3 - a^2 + 4 - a^3 - 2a^2 + 4 \\ &= 2a^3 - 3a^2 + 8 \end{aligned}$$

Hacer las siguientes restas

- 1)  $(5x^4 + 4) - (2x^2 - 1) =$   
2)  $(-7m^3 + 2m + 4) - (-2m^3 - 4) =$

**Multiplicación de un monomio por un polinomio**

Para realizar esta operación podemos utilizar la regla para multiplicar monomios y la ley distributiva.

**Ejemplo:**

$$3x(2x + 1) = 6x^2 + 3x$$
$$ab(3a^2b^2 + 2ab + 3) = 3a^3b^3 + 2a^2b^2 + 3ab$$

Realice las siguientes multiplicaciones

- 1)  $(2x)(3xy + 4x) =$   
2)  $x^2h(xhhy + hy + h) =$   
3)  $3s(s^3 - 4s^2 + 1^2) =$   
4)  $(4s + 41)(21s) =$   
5)

**Multiplicación de binomios****Ejemplo:**

$$(x + 3)(x + 2) = x(x + 2) + 3(x + 2)$$
$$= x^2 + 2x + 3x + 6$$
$$= x^2 + 5x + 6$$
$$\text{ó } (x + 3)(x + 2) = x^2 + 2x + 3x + 6$$
$$= x^2 + 5x + 6$$

Realizar las siguientes multiplicaciones

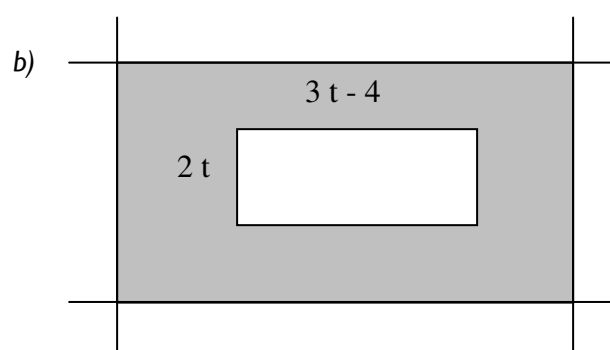
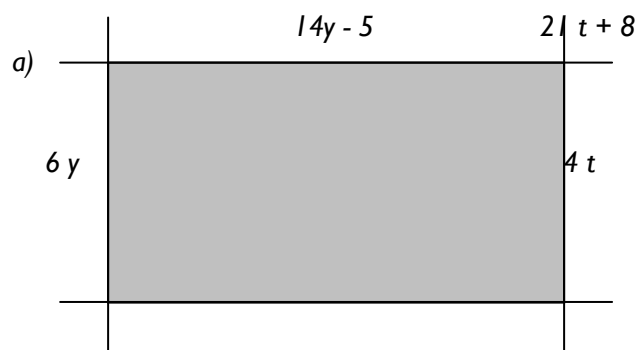
- 1)  $(2xy + 4x)(-2y + y^2) =$       2)  $(x + 3)(x - 5) =$   
3)  $(2x^2 - 3)(x - 2) =$       4)  $(y^3 + 7)(y^3 + 7) =$   
5)  $(3a + b)(-2a - 4b) =$       6)  $(3rs + 2r)(r^2 + 2rs^2) =$

También la pueden hacer así:

$$(3x+1)(2x+1)$$

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ 2x+1 \\ \hline 6x^2+2x \\ 3x+1 \\ \hline 6x^2+5x+1 \end{array}$$

7.- Encontrar una expresión para el área de la región sombreada.



### **Multiplicación de binomios; productos notables.**

Producto de la suma y diferencia de dos expresiones.

Producto:  $(a+b)(a-b)$

El producto de la suma y resta de dos términos es igual al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo.

$$\begin{aligned} (a+b)(a-b) &= a(a-b) + b(a-b) \\ &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

**Ejemplo:**

$$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$$

$$\begin{aligned} (-2x + y)(-2x - y) &= (-2x)^2 - (y)^2 \\ &= 4x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Realice las siguientes multiplicaciones

1)  $(x - 1)(x + 1) =$

2)  $(3x + z)(3x - z) =$

3)  $(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}) =$

4)  $(e^x - x)(e^x + x) =$

5)  $\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) =$

6)  $(2x^3 + y)(2x^3 - y) =$

7)  $(\text{Sen } x - 1)(\text{Sen } x + 1) =$

8)  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2y\right) =$

9)  $(.02 - p)(.02 + p) =$

10)  $\left(\frac{3}{2}x + 2y\right)\left(\frac{3}{2}x - 2y\right) =$

### **Cuadrado de un binomio.**

El cuadrado de un binomio es el cuadrado del primer término más, el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Ejemplo:**

$$(x + 6)^2$$

$$(x + 6)^2 = x^2 + (2x)(6) + 36$$

$$= x^2 + 12x + 36$$

Desarrolle

$$\begin{aligned} (2xy - 3x^2)^2 &= (2xy)^2 + 2(2xy)(-3x^2) + (-3x^2)^2 \\ &= 4x^2y^2 - 12x^3y + 9x^4 \end{aligned}$$

Problemas: Desarrolle las siguientes expresiones

1)  $(4t+1)^2 =$

2)  $(-1)^2 =$

3)  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 =$

4)  $(7a-2b)^2 =$

5)  $(2x-1)^2 =$

6)  $(t-3)^2 =$

7)  $(\sqrt{x+2})^2 =$

8)  $(\cos x + 1)^2 =$

9)  $\left(3x + \frac{3}{4}\right)^2 = //$

10)  $(t^2 - 0.2)^2 =$

### **Multipliación de Polinomios.**

Para realizar esta operación se multiplica cada término de un polinomio por cada término de otro. Después se suman.

**Ejemplo:**

$$\begin{aligned}(x^2 + 3)(x^2 + 3x + 3) \\&= x^2(x^2 + 3x + 3) + 3(x^2 + 3x + 3) \\&= x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x^2 + 9x + 9 \\&= x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 9x + 9\end{aligned}$$

**ó también**

$$\begin{array}{r}x^2 + 3x + 3 \\x^2 + 3 \\ \hline x^4 + 3x^3 + 3x^2 \\ \phantom{x^4 + 3x^3 + } 3x^2 + 9x + 9 \\ \hline x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 9x + 9\end{array}$$

Problemas: Realice las siguientes multiplicaciones.

1)  $(3a^2 + a + 2)(a^2 + 1) =$

2)  $(2x^2 + x - 2)(x - 1) =$

3)  $(2xy + 2x + y)(x^2y - y) =$

**Resumiendo las reglas de multiplicación.**

(Polinomio) (Monomio) Se multiplica cada término del polinomio por el monomio.

(Binomio) (Binomio)

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

**Factorización.**

El proceso de escribir un número o una expresión algebraica como un producto se le da el nombre de FACTORIZACION.

Ejemplo:

$$\text{Puesto que } x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

$$x + 3 \text{ y } x - 3 \text{ Son los factores de } x^2 - 9$$

**El Factor Común**

La propiedad distributiva apoya para obtener un factor común.

$$\text{Recordemos que: } x(y + z) = (y + z)x = xy + xz$$

Un factor que se encuentra en todos los términos de un polinomio se llama un FACTOR COMUN.

**Ejemplo:**

Factorice las siguientes expresiones.

$$1. -6x + 9xy^3$$

$$\begin{aligned} \text{Solución: } -6x^2 + 9xy^3 &= 3x(-2x) + 3x(3y^3) \\ &= 3x(-2x + 3y^3) \end{aligned}$$

Si sacáramos el factor común como un negativo la Factorización es



$$\begin{aligned} -6x^2 + 9xy^3 &= -3x(2x) - 3x(-y^3) \\ &= -3x(2x - y^3) \end{aligned}$$

2.  $126x^3yz^4 - 90x^2y^3z^3 + 36x^4y^3z^4$

**Nota:** Las literales comunes se eligen con el menor exponente.

**Solución:** factor común  $18x^2yz^3$ , así

$$126x^3yz^4 - 90x^2y^3z^3 + 36x^4y^3z^4 = 18x^2yz^3(7xz - 5y^2 + 2x^2y^2)$$

3.  $-2(x+y) + 5z^2(x+y)$

**Solución:** factor común  $x+y$ , luego

$$-2(x+y) + 5z^2(x+y) = (x+y)(-2 + 5z^2)$$

Ejercicios. Factorice las siguientes expresiones sacando los factores comunes.

4.  $8xy^3 - 20zy^2 + 18xzy^3 =$

5.  $7a^3 - 49ab^3 =$

6.  $x^3y^3z^4 + x^2y^3z^3 + x^4y^3z^4 =$

7.  $15x^3 + 10ax^3 - 15a^3x^3 =$

8.  $4a^4b - 6a^3b + 12a^2b - 10ab =$

9.  $5x(2a - b) - 3y(2a - b) =$

10.  $x(a + b)^2 - y(a + b)^2 =$

11.  $7m(a - b)^3 + 21n(a - b)^3 =$

12.  $2x(2x - y)^2 - y(2x - y) =$

13.  $2a(x - y)^4 + 3b(x - y)^3 =$

### Factorización por agrupación

La técnica consiste en asociar dos o más términos con un factor común, para obtener una expresión con un factor común.

Ejemplos: Factorice las siguientes expresiones completamente.

1.  $3x + 3y + ax + ay$

Solución:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 + ax^2 + ay^2 &= (3x^2 + 3y^2) + (ax^2 + ay^2) \\ &= 3(x^2 + y^2) + a(x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(3 + a) \end{aligned}$$

2.  $3a^2x^2 + 18bc^3y - 36bc^3xz + 12a^2xz - 9bc^3x^2 - 6a^2y$

Solución:

$$\begin{aligned} 3a^2x^2 + 18bc^3y - 36bc^3xz + 12a^2xz - 9bc^3x^2 - 6a^2y &= 3(a^2x^2 + 6bc^3y - 12bc^3xz + 4a^2xz - 3bc^3x^2 - 2a^2y) \\ &= 3(a^2x^2 + 6bc^3y - 12bc^3xz + 4a^2xz - 3bc^3x^2 - 2a^2y) \\ &= 3[(a^2x^2 - 2a^2y + 4a^2xz) + (-3bc^3x^2 + 6bc^3y - 12bc^3xz)] \end{aligned}$$

3.  $3x^2 + x^3 + 3 + x$

**Solución:**  $3x^2 + x^3 + 3 + x = (3x^2 + x^3) + (3 + x)$

$$= x^2(3 + x) + (3 + x)$$

$$3x^2 + x^3 + 3 + x = (3 + x)(x^2 + 1)$$

Ejercicios: Factorice las siguientes expresiones por agrupamiento completamente.

4.  $3xy - 6y + 4x - 8$

5.  $2x^2 - 2yz - 2xz + 2yx$

6.  $xy + 5x + 5y + y^2$

7.  $3a^2x^2 + 18bc^3y - 36bc^3xz + 12a^2xz - 9bc^3x^2 - 6a^2y$

8.  $-2x^4 + 6x^3 + 10x^2 - 30x$

9.  $6x^3 - 2x^4 - 30x + 10x^2$

10.  $x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x$

**Diferencia de cuadrados perfectos.**

Si tomamos en cuenta el producto de dos binomios conjugados, observamos que un resultado es una diferencia de cuadrados. Por ejemplo:

$$(2x + 5)(2x - 5) = 4x^2 - 25$$

Podemos utilizar esta solución para factorizar una diferencia de 2 cuadrados. Buscamos las raíces cuadradas de cada término y las acomodamos en 2 factores sumándolas en uno de ellos y restándolas en otro.

Por la propiedad simétrica de la igualdad tenemos.

$$4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$$

Ejemplos: Factorizar.

1).  $36x^2 - 25y^6$

Solución:  $36x^2 - 25y^6 - 25y^6 = (6x + 5y^3)(6x - 5y^3)$

Raíz cuadrada (r c)  $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 6x & 5y^3 \end{matrix}$

2).  $9a^8b^4 - 49 = (3a^4b^2 + 7)(3a^4b^2 - 7)$

(r c)  $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 3a^4b^2 & 7 \end{matrix}$

3).

$$\frac{9}{x^4} - 16y^6 = \left(\frac{3}{x^2} + 4y^3\right)\left(\frac{3}{x^2} - 4y^3\right)$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ 3/x^2 & 4y^3 \end{matrix}$$

4.  $8a^2b^2 - 50a^6 = 2a^2(9b^2 - 25a^4)$  factor común  
 $= 2a^2(3b + 5a^2)(3b - 5a^2)$

Comentario: En general, la suma de cuadrados perfectos no se puede factorizar.

Ejercicios: Factorice los siguientes binomios completamente

5.  $3x^2 - 27y^4$

8.  $81b^4 - 16y^4$

6.  $81xy^2 - 25x^3z^4$

9.  $\frac{1}{16}b^8 - \frac{1}{49}a^2$

7.  $121b^4$

10.  $36x^6 - 16y^2$

### Trinomios de segundo grado.

La Factorización de un polinomio de segundo grado,  $px^2 + qx + r$ , donde  $p, q$ , y  $r$  son enteros es de la forma  $(ax + b)(cx + d)$ , esto es:

$$px^2 + qx + r = (ax + b)(cx + d)$$

Donde  $a, b, c$ , y  $d$  son enteros. Al efectuar la multiplicación se deduce que  $ac = p$ ,  $bd = r$  y  $Ad + bc = q$ . Para hallar  $a, b$  y  $d$  seguiremos el método ejemplificando con un ejercicio.

Factorizar:  $3x^2 - 7x - 6$

Solución: Aquí;  $p = 3$ ,  $q = -7$  y  $r = -6$ .

1. Descomponga  $px^2$  y  $r$  como el producto de dos factores. Ejemplo.  $3x^2 = 3x(x)$   
 $-6 = -3(2)$

2. Escríbalos en la forma.

| factores de |      |
|-------------|------|
| $px^2$      | $r$  |
| $3x$        | $-3$ |
| $x$         | $2$  |

3. Efectúe el producto cruzado de estos factores y sumemos.

|      |      |                                |
|------|------|--------------------------------|
| $3x$ | $-3$ |                                |
|      |      | $3x(2) + x(-3) = 6x - 3x = 3x$ |
| $x$  | $2$  |                                |

4. Si la suma de los productos cruzados no es el término lineal ( $-7x$ ), proponga un arreglo Diferente (inclusive con otros factores de  $px^2$  y de  $r$ ) y efectúe los pasos 3 y 4 hasta conseguirlo.

|      |      |                  |
|------|------|------------------|
| $3x$ | $2$  |                  |
|      |      | $-9x + 2x = -7x$ |
| $x$  | $-3$ |                  |

5. Una vez obtenido forme los binomios:  $3x + 2$  y  $x - 3$ . Luego, la factorización es:

$$3x^2 - 7x - 6 = (3x + 2)(x - 3)$$

Ejemplos: Factorice los siguientes trinomios.

a)  $6x^2 - 25x + 14$

Solución:

|      |      |                    |
|------|------|--------------------|
| $3x$ | $-2$ |                    |
|      |      | $-21x - 4x = -25x$ |

$$2x - 7$$

$$\therefore 6x^2 - 25x + 14 = (3x - 2)(2x - 7)$$

b)  $a^2 + 8a + 15$

Solución:

$$a \quad 5$$

$$3a + 5a = 8a$$

$$a \quad 3$$

$$a^2 + 8a + 15 = (a + 5)(a + 3)$$

c)  $x^2 - 6x + 9$

Solución:

$$x \quad -3$$

$$-3x - 3x = -6x$$

$$x \quad -3$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$$

La Factorización de trinomios de la forma  $px^2 + qxy + ry^2$  es muy similar.

Ejemplo: Factorizar,  $15x^2 + 8xy + y^2$

$$3x \quad y$$

$$3xy + 5xy = 8xy$$

$$5x \quad y$$

$$15x^2 + 8xy + y^2 = (3x + y)(5x + y)$$

Existe un número ilimitado de posibilidades para valores de  $a, b, c, d$  y para las combinaciones  $ac = p$ ,  $bd = r$  y  $ad + bc = q$ . Todo es asunto de intento y error y Desarrollo de la intuición mediante la experiencia.

Ejercicios: Factorice los siguientes trinomios completamente.

1.  $x^2 + 2x - 8$

2.  $4y^2 + 11y - 3$

3.  $4a^2 - 12a + 9$
4.  $3x^2 + 16x + 2$
5.  $a^2 - 5a - 24$
6.  $y^2 + 21y + 90$
7.  $6x^2 - 13x + 6$
8.  $64 - 16x + x^2$
9.  $16a^2 + 40a + 25$
10.  $z^2 - 14z - 51$
11.  $110 - b - b^2$
12.  $5 - 9x - 2x^2$
13.  $4m^6 + m^3 - 14$  (sugerencia  $4m^6 + m^3 - 14 = 4(m^3)^2 + (m^3) - 14$ )
14.  $16x^2 + 56x + 49$
15.  $m^2 - 13mn + 36n^2$
16.  $x^2 + 16xy - 260y^2$
17.  $12x^2y^2 - 11xypq - p^2q^2$
18.  $12x^4 + 2x^2y - 30y^2$
19.  $19x^2 - 3xy - 10y^2$
20.  $24m^2 + 22mn - 21n^2$

### **SOLUCIONES:**

#### **El factor común.**

4.  $2y^2(4xy - 10z + 9xyz)$
5.  $7a(a - 7b^2)$
6.  $x^2y^2z^2(xz + y + x^2 + yz)$
7.  $5x^3(3 + 2a - 3a^2)$
8.  $2ab(2a^3 - 3a^2 + 6a - 5)$
9.  $(2a - b)(5x - 3y)$
10.  $(a + b)^2(x - y)$
11.  $7(a - b)^3(m + 3n)$
12.  $(2x - y)[2x(2x - y) - y] - y = (2x - y)(4x^2 - 3xy - y)$
13.  $(x - y)^3(2ax - 2ay + 3ab)$

#### **Factorización por agrupación.**



4.  $(x - 2)(3y + 4)$

5.  $2(x - z)(x + y)$

6.  $(y + 5)(x + y)$

7.  $3(x^2 - 2y + 4xz)(a^2 - 3bc^3)$

8.  $(3 - x)(2x^3 - 10x)$

9.  $2x(3 - x)(x^2 - 5)$

10.  $x(x - 1)(x^2 + 2)$

**Diferencia de cuadrados.**

5.  $3(x + 3y^2)(x - 3y^2)$

6.  $x(9y + 5xz^2)(94 - 5xz^2)$

7.  $(11b^2 + 6a^2)(11b^2 - 6a^2)$

8.  $(9b^2 + 4y^2)(3b + 2y)(3b - 2y)$

9.  $\left(\frac{b^4}{4} + \frac{a}{7}\right)\left(\frac{b^4}{4} - \frac{a}{7}\right)$

10.  $(6x^3 + 4y^5)(6x^3 - 4y^5)$

**Suma o diferencia de dos cubos perfectos.**

5.  $\frac{x}{3} - \frac{y}{z} \left( \frac{x^2}{9} + \frac{xy}{6} + \frac{y^2}{4} \right)$

6.  $(xy + z)(x^2y^2 - xyz + z^2)$

7.  $x(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

8.  $(3y - 5)(2y^2 - 14y + 25)$

9.  $(y - 1)(7y^2 + 4y + 1)$

10.  $(x^2 - 4y^3)(x^4 + 4x^2y^3 + 16y^6)$



$$11. (a - 2b^2)(a + b^2)(a^2 + 2ab^2 + 4b^4)(a^2 + 2ab^2 + 4b^4)$$

$$12. ab(a^2b^2 + ab + 1)$$

**Trinomios de segundo grado.**

$$1. (x + 4)(x - 2)$$

$$2. (4y - 1)(y + 3)$$

$$3. (2a - 3)^2$$

$$4. (3x - 2)(x + 6)$$

$$5. (a - 8)(a + 3)$$

$$6. (y + 15)(y + 6)$$

$$7. (3x - 2)(2x - 3)$$

$$8. (8 - x)^2$$

$$9. (4a + 5)^2$$

$$10. (z - 17)(z + 3)$$

$$11. (b + 10)(b + 11)$$

$$12. (-2x - 1)(x + 5)$$

$$13. (4m^3 - 7)(m^3 + 2)$$

$$14. (4x^4 + 7)^2$$

$$15. (m - 9n)(m - 4n)$$

$$16. (x + 26y^3)(x - 10y^3)$$

$$17. (12xy + pq)$$

$$18. (3x^2 + 5y)(2x^2 - 3y)$$

$$19. (x - 5)(x + 2y^2)$$

$$20. (12m - 7n)(2m + 3n)$$



**ECUACIONES LINEALES.****CONCEPTOS BÁSICOS.**

**IGUALDAD O PROPOSICIÓN DE IGUALDAD.** Es la relación o comparación que se establece entre dos expresiones algebraicas mediante el signo  $=$  (igual a); llamándosele primer miembro de la igualdad a la expresión que se escribe a la izquierda del signo y segundo miembro al que se escribe del lado derecho.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} 3(x-2) & = & \frac{4}{5}x+1 \\ \text{1}^{\text{er}} \text{miembro.} & & \text{2}^{\text{do}} \text{miembro.} \end{array}$$

**ECUACIONES O IDENTIDADES.** Las proposiciones de igualdad que contienen variables pueden ser ecuaciones o identidades; son ecuaciones si existe, cuando menos, un valor de sus variables que de lugar a una igualdad falsa, y son identidades cuando la igualdad es verdadera para todos los valores posibles de sus variables.

De las igualdades siguientes determine cuales son ecuaciones y cuales identidades.

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \frac{x-3}{2} = x & 3. \quad 3x-5 = 2(x-3) + x + 1 \\ 2. \quad 5x + 1 = 3(x-2) - 2(1-1) & 4. \quad \frac{x(x^2-4)}{x+2} = x^2 - 2x \end{array}$$

Resolver una ecuación, es determinar los valores que pueden adquirir sus variables para que la igualdad sea

Verdadera; a estos valores se les llama raíces o soluciones de la ecuación y constituyen un conjunto solución.

Para resolver ecuaciones en una variable, es conveniente que a partir de ella y mediante operaciones algebraicas se obtengan otras con el mismo conjunto solución que permite determinar a dicho conjunto de una manera sencilla e inmediata...

Se dice que la variable de una ecuación está despejada cuando se logra aislarla en un solo miembro mediante las operaciones algebraicas que establecen los postulados o propiedades de la igualdad.

**Propiedad de igualdad**

1.- Suma o restar la misma cantidad en ambos miembros de la ecuación no cambia su solución.

2.- Multiplicar o dividir ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad no cambia su solución.

**LAS ECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO CON UNA VARIABLE O INCÓGNITA.** Son iguales que pueden reducirse a la forma  $ax + b = 0$  en la cual  $a$  y  $b$  son constantes con  $a \neq 0$  y  $x$  es la variable o incógnita. Estas ecuaciones tienen solamente una raíz.

Para resolver estas ecuaciones, basta con despejar a su variable o incógnita mediante la aplicación de las propiedades de la igualdad.

Procederemos ahora a ver algunos ejemplos de solución de ecuaciones lineales.

Ejemplo:

1.- Resolver la ecuación  $2(x-3) = 4x + 10$

Solución: Simplificamos el primer miembro  $2x - 6 = 4x + 10$

Sumamos  $6-4x$  en ambos lados,  
Obtenemos  $2x-6+6-4x = 4x + 10+6-4x$   
 $-2x = 16$

Dividiendo ambos lados por  $-2$  obtenemos  $x = -8$

Al resolver ecuaciones podemos comprobar si hemos obtenido la solución correcta. Si sustituimos la solución en la ecuación original debemos obtener una proposición verdadera.

Así en el ejemplo anterior.

$$2(x-3) = 4x+10$$

$$2(-8-3) = 4(-8) + 10$$

$$-22 = -22$$

ecuación original

sustituyendo  $x$  por  $-8$

obtenemos una proposición verdadera,  
por lo que  $-8$  es la solución.

2.- Resolver la ecuación

$$\frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} = \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4}$$

Multiplicando, ambos

$$8(x+1) \left[ \frac{x}{x+1} + \frac{5}{8} \right] = 8(x+1) \left[ \frac{5}{2(x+1)} + \frac{3}{4} \right]$$

Miembros por el común  
Denominador  $8(x+1)$ ,

Obtendremos:

$$8x+5(x+1)=4(5)+6(x+1)$$

Quitando paréntesis

$$8x + 5x + 5 = 20 + 6x + 6$$

dividiendo ambos miembros entre 7

$$7x=21$$

comprobación

$$\frac{3}{3+1} + \frac{5}{2(3+1)} + \frac{3}{4}$$

3.- Resolver la ecuación

$$\frac{a-x}{b} = 2 - \frac{x-b}{a}$$

multiplicando ambos lados por  $ab$ ,

$$ab\left(\frac{a-x}{b}\right) = ab\left(2 - \frac{x-b}{a}\right)$$

obtenemos

$$a(a-x) = 2ab - b(x+b)$$

quitando paréntesis

$$a^2 - ax = 2ab - bx - b^2$$

obtendremos

$$a^2 - ax + bx - a^2 = 2ab - bx - b^2 + bx - a^2$$

sumando  $bx - a^2$ 

$$\begin{aligned} -ax + bx &= 2ab - b^2 - a^2 \\ -(a-b)x &= -(a^2 - 2ab + b^2) \end{aligned}$$

factorizando

$$-(a-b)x = -(a-b)^2$$

dividiendo ambos lados por  $-(a-b)$ 

$$\begin{aligned} \frac{-(a-b)}{-(a-b)}x &= \frac{-(a-b)^2}{-(a-b)} \\ x &= a - b \end{aligned}$$

### Aplicaciones

La compañía manufacturera Faus96 S. A fabrica sacapuntas. Los costos de inicio son \$10000 (para equipo, materia prima, etc). Fabrica cada sacapuntas cuesta \$ 4.00, si se vende a \$ 5.95 cada uno, ¿Cuántos deben vender para tener una ganancia de \$ 30.000.

Tenemos que :

*Ingreso-costo = ganancia**Si  $x$  = numero de sacapuntas vendidos, entonces el**Ingresos =  $5.95x$  y el costo =  $4x$ . La sustitución en la primera ecuación nos da:*

$$5.95x - (4x + 10000) = 30000$$

$$5.95x - 4x - 10000 = 30000$$

$$1.95x - 10000 = 30000$$

$$1.95x = 40000$$

$$x \approx 20512.82 \text{ o sea } 20513 \text{ sacapuntas}$$

**Ejercicios:**

Resuelva las siguientes ecuaciones

$$1. -\sqrt{2x} - 5 = 0$$

$$2. -3(3y - 2) = 2(4y + 1)$$

$$3. -\frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$$

$$4. -\frac{2}{3}t + 4 = 2 - \frac{5}{2}t$$

$$5. -\frac{12-7w}{6} = \frac{2w+1}{9}$$

$$7. -\frac{1}{3} + \frac{2}{6x+3} = \frac{3}{2x+1}$$

$$8. -\frac{5}{4y-2} - \frac{1}{6y-3} = \frac{4}{5}$$

$$9. -\frac{1}{2x-1} = \frac{3}{4x-2}$$

$$10. -2 - \frac{5}{3x-7} = 2$$

$$11. -\frac{7}{y^2-4} - \frac{4}{y+2} = \frac{5}{y-2}$$

$$6. -(6x-5)^2 = (4x+3)(9x-2)$$

Resuelve las siguientes ecuaciones para la incógnita indicada:

$$12. \frac{2m+n}{3} = \frac{m-n}{2}, \quad \text{para } m$$

$$13. \frac{2y-a}{x} = \frac{2y-x}{a}, \quad \text{para } a$$

$$14. \frac{a-x}{b} = 2 - \frac{a-b}{x}, \quad \text{para } a$$

$$15. \frac{12x-a}{10+2a} = \frac{x+a}{6a} - \frac{x+2a}{1-a}, \quad \text{para } x$$

16.- Un obrero entrega 55 piezas terminadas y le pagan \$120.00 por cada pieza sin defecto, pero el tiene que pagar \$30.00 por cada pieza defectuosa, sin finalmente recibe \$3,600.00 ¿Cuántas piezas sin defecto entrego?

17.- Compre un lote de libros, por la mitad de ellos pague \$7,000.00 por cada cinco libros, y de la otra mitad pague \$9,000.00 por cada siete libros. Si vendo todo el lote a \$3,000.00 por cada dos libros obtendré una ganancia por \$11,000.00 ¿De cuantos libros es el lote?

18.- Un químico tiene 10ml de una solución que contiene 30% de concentración de ácido ¿Cuántos milímetros de ácido puro deben agregarse para aumentar la concertación a 50%?

19.- Tomas puede hacer cierto trabajo en 3 hrs. Mientras que Roberto puede hacer el mismo en 4 hrs. Si trabajan juntos ¿Cuánto tiempo les llevara hacer el trabajo?

20.- En la presentación de una película de horror asistieron 600 personas el costo de los boletos para adulto fue de \$11.00, mientras que los niños pagaron solamente \$7.00. Si la taquilla del cine recibió \$5,800.00¿Cuántos niños asistieron a la premier?

### Soluciones:

1.-  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

2.-  $\frac{8}{13}$

3.- 2

4.-  $\frac{12}{9}$

5.-  $\frac{34}{25}$

6.-  $\frac{31}{79}$

7.- 3

8.-  $\frac{89}{48}$

9.- No hay solución. 10.- No hay solución

11.-  $\frac{5}{9}$

12.-  $m = -5n$

13.-  $y = \frac{a+x}{2}$

14.-  $a = x + b$

15.-  $x = \frac{3a(1-9a)}{10+2a}$

16.- 35 piezas

17.- 70 Libros

18.- 4 ml

19.- 1 : 43 min

20.- 200 niños

### Ecuaciones Cuadráticas

Una ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , donde  $a, b, c \in \mathcal{R}$ , fijos, con  $a \neq 0$ , se llama ECUACIÓN CUADRÁTICA en la incógnita  $x$ . Si  $b = 0$ , llamamos a dicha ecuación cuadrática **incompleta o pura**, si  $b \neq 0$ , decimos que es **completa**

### Resolución por Factorización

Si el miembro izquierdo de la ecuación cuadrática  $ax^2 + 10x + c = 0$  puede factorizarse, las raíces de la ecuación pueden encontrarse igualando cada factor a cero y resolviendo para  $x$ . Este procedimiento está justificado ya que “Si el producto de dos o más números es igual a cero, entonces algunos de ellos es necesariamente cero”

Ejemplo:

Busque las soluciones de las ecuaciones cuadráticas siguientes.

1.-  $2x^2 - x - 6 = 0$

**Solución:**  $2x^2 - x - 6 = 0$  ... ecuación dada

$$(2x + 3)(x - 2) = 0 \quad \dots \text{factorizado}$$

$$2x + 3 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2 = 0 \quad \dots \text{igualando cada factor a cero}$$

$$\therefore x = -3/2 \quad \text{ó} \quad x = 2$$

2.-  $x^2 - 9 = 0$

**Solución:**  $(x + 3)(x - 3) = 0$  ... factorizado

$$x + 3 = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2 = 0 \quad \dots \text{igualando a cero}$$

$$\therefore x = -3 \quad \text{ó} \quad x = 3$$

Hacemos hincapié sobre el hecho de que este método se aplica solamente cuando el miembro derecho de la ecuación es cero.

Puede demostrarse que cualquier ecuación cuadrática es equivalente a una de la forma  $(x+d)^2 = k$  por consiguiente  $x + d = \pm\sqrt{k}$  (¿por qué?) y  $x = -d \pm \sqrt{k}$ , en consecuencia las soluciones son  $x = -d + \sqrt{k}$  y  $x = -d - \sqrt{k}$ . si  $k < 0$ , entonces  $\sqrt{k} \notin \mathbb{R}$ .

Si  $i^2 = -1$ , entonces  $i = \sqrt{-1}$ . A si, si  $n > 0$  se define  $\sqrt{-n}$  para ser  $\sqrt{n(-1)} = \sqrt{n} \sqrt{-1}$  luego  $\sqrt{-n} = \sqrt{n} i$ ,  $n > 0$

$$\text{A si, } \sqrt{9} = 3i; \sqrt{-3} = \sqrt{3}i$$

Un número de la forma  $a + bi$ ,  $a$  y  $b \in \mathbb{R}$ , se llama número complejo. Si  $a = 0$  y  $b \neq 0$ , entonces  $a + bi$  es  $bi$  y se llama NÚMERO IMAGINARIO PURO. Así que  $3 - 2i$  es un número complejo y  $2i$  es un número imaginario.

3.- Resolver:  $x^2 + 4 = 0$

**Solución:**

$$x^2 = -4$$

$$x = \frac{+}{-} \sqrt{-4} = \frac{+}{-} 2i$$

$$\therefore x = 2i \quad \text{ó} \quad x = -2i$$

### Resolución por el método de completar cuadrados

La ecuación cuadrática  $x^2 + bx + c = 0$  con  $b$  y  $c \in \mathcal{R}$ , considerando que  $x^2 + bx$  son los primeros términos de un cuadrado binomio perfecto, podemos “completarlo”. Así hacerlo, lo factorizaremos como tal y entonces se tomara la raíz cuadrada de ambos términos de la ecuación que nos resulte. Esto nos producirá una ecuación lineal que habrá de resolver.

Para completar el cuadrado para  $x^2 + bx$ , se suma  $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

Ejemplos: Resuelva las siguientes ecuaciones completando cuadrados.

1.-  $x^2 + 4x + 2 = 0$

**Solución:**

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= -2 \\ x^2 + 4x + (2)^2 &= -2 + (2)^2 \\ (x + 2)^2 &= 2 \end{aligned}$$

$$x + 2 = \frac{+}{-} \sqrt{2}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore x = -2 + \sqrt{2} \quad \text{ó} \quad x = -2 - \sqrt{2}$$

... tenemos que  $b = 4$

... sumando  $2^2$  en ambos lados. tenemos

2.-  $3x^2 - 11x + 10 = 0$

**Solución:**

Multiplicando por  $1/3$  ambos lados para hacer  $a = 1$ , obtenemos aquí

$$1/3 (3x^2 - 11x + 10) = 1/3 (0)$$

$$x^2 - 11/3 x + 10/3 = 0$$

$$x^2 - 11/3 x = -10/3$$

$$b = 11/3$$

Sumando  $(b/2)^2 = (11/6)^2$ , obtendremos:

$$x^2 - \frac{11}{3}x + \left(\frac{11}{6}\right)^2 = -\frac{10}{3} + \left(\frac{11}{6}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 = -\frac{10}{3} + \frac{121}{36} = \frac{-120 + 121}{36} = \frac{1}{36}$$

$$x - \frac{11}{6} = \pm \sqrt{\frac{1}{36}} = \pm \frac{1}{6}$$

$$x = -\frac{11}{6} \pm \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{11}{6} \pm \frac{1}{6} \quad \text{ó} \quad x = \frac{11}{6} - \frac{1}{6}$$

$$x = 2 \quad \text{ó} \quad x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

3.-  $x^2 + 2x + 2 = 0$

**Solución:**

Como  $b = 2$ , tenemos

$$x^2 + 2x = -2$$

$$x^2 + 2x + 1 = -2 + 1$$

$$(x + 1)^2 = -1$$

$$x + 1 = \pm \sqrt{-1} = \pm i$$

$$x = -1 \pm i$$

$$\therefore x = -1 + i \quad \text{ó} \quad x = -1 - i$$

4.-  $ax^2 + bx + c = 0$

( COMPLETAR )

**Solución:**

Dividimos ambos lados entre  $a$   
y obtenemos

$$x^2 + \boxed{\phantom{00}} x + \boxed{\phantom{00}} = 0$$

$$x^2 + \boxed{\phantom{00}} x = \boxed{\phantom{00}}$$



completando el trinomio

cuadrado perfecto :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

podemos escribir

$$\left(x + -\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

al tomar la raíz cuadrada

en ambos lados obtenemos

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces las raíces de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  están dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A si hemos encontrado la formula general para resolver cualquier ecuación de segundo grado o cuadrática.

Este es el método mas sencillo y practico de resolver ecuaciones cuadráticas. Consiste en sustituir los coeficientes numéricos de estos en la fórmula, y evaluar el resultado.

Ejemplos : resuelva mediante la formula general las siguientes ecuaciones.

1.-  $2x^2 - 8x + 3 = 0$

**Solución:** En esta ecuación  $a = 2$ ,  $b = -8$  y  $c = 3$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 24}}{4}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 24}}{4}$$

$$\therefore x = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{10} \quad \text{ó} \quad x = 2 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

2.-  $x^2 - 4x + 13 = 0$

**Solución :** En esta ecuación  $a = 1$ ,  $b = -4$ , y  $c = 13$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

$$\therefore x = 2 + 3i \quad \text{ó} \quad x = 2 - 3i$$

El número  $b^2 - 4ac$ , que aparece bajo el radical en la fórmula cuadrática, se denomina **DISCRIMINANTE** de la ecuación cuadrática. puede utilizarse para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación como se explica a continuación.

- i) si  $b^2 - 4ac > 0$ , la ecuación tiene dos raíces reales diferentes.
- ii) si  $b^2 - 4ac = 0$ , la ecuación tiene una raíz doble.
- iii) Si  $b^2 - 4ac < 0$ , la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas.

*Ejercicio*

Resuelva las siguientes ecuaciones por Factorización.

1.-  $2x^2 - 11x + 5 = 0$

3.-  $6x^2 = x + 35$

5.-  $-4n^2 + n + 5 = 0$

2.-  $y^2 + 4 = 5y$

4.-  $5x^2 + 12x + 4 = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones completando los cuadrados.

6.-  $x^2 - 11x - 12 = 0$

7.-  $12y^2 - 10y^2 + 4 = 0$

Resuelva las siguientes ecuaciones aplicando la fórmula.

8.-  $10x^2 + 9x - 7 = 0$

12.-  $\frac{x+1}{3x+2} = \frac{x-2}{2x-3}$

9.-  $6x^2 - 11x + 3 = 0$

13.-  $x^2 + 2x + 5 = 0$

10.-  $x^2 + 8x + 15 = 0$

14.-  $4x^2 + x + 3 = 0$

11.-  $4x^2 + 6x = 1$

15.-  $x^2 - 3x + 10 = 0$

**SOLUCIONES:**

1.-  $\frac{1}{2}, 5$

6.-  $12, -1$

11.-  $\frac{-3+\sqrt{13}}{4}, \frac{-3-\sqrt{13}}{4}$

2.-  $4, 1$

7.-  $\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$

12.-  $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

3.-  $-\frac{7}{3}, \frac{5}{2}$

8.-  $\frac{1}{2}, -\frac{7}{5}$

13.-  $-1 \pm 2i$

4.-  $-2, -\frac{2}{5}$

9.-  $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$

14.-  $\frac{-1 \pm \sqrt{47}i}{8}$

5.-  $\frac{5}{4}, -1$

10.-  $3 + \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}$

15.-  $\frac{3 \pm \sqrt{31}i}{2}$

**Sistemas de ecuaciones lineales ( dos ecuaciones dos incógnitas)**

Un sistema de ecuaciones en un conjunto de ecuaciones para el cual buscamos una solución común, La solución de un sistema son los valores que establecen la igualdad en cada ecuación del sistema.

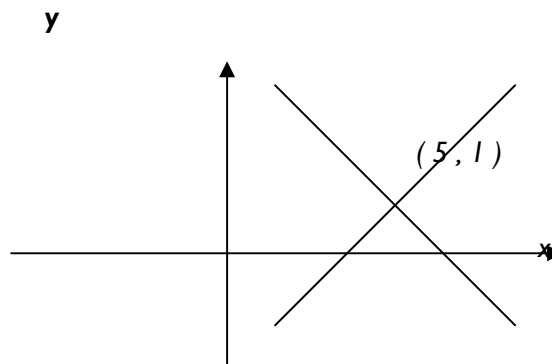
**Método de solución por graficación**

Solución de sistemas de ecuaciones por graficación. Este método consiste en graficar las ecuaciones ( en este caso rectas) y encontrara las coordenadas del punto de intersección si es que existe

Ejemplo:

Resolver  $x + 2y = 0$   
 $x = y + 4$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$   
 $y = x - 4$



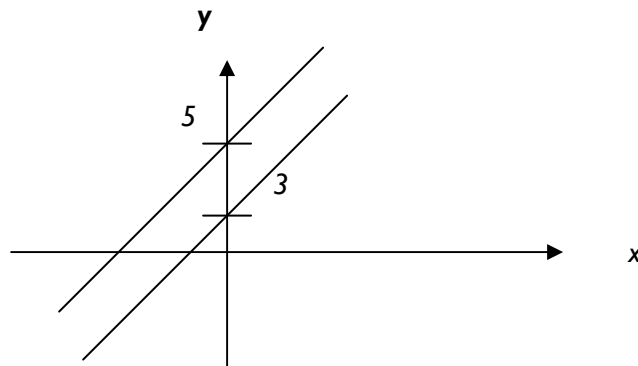
**La solución es ( 5 , 1 )**

Resolver  $y - 2x = 3$

$$y - 5 = 2x$$

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2x + 5$$



**El sistema no tiene solución ( no existe intersección )**

**Observación:** Si las soluciones no son enteras este método suele ser inexacto.

Resolver los siguientes sistema por graficación .

$$\begin{aligned} 1) \quad & x + 4y = -6 \\ & 2x - 3y = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & y + 2x = 5 \\ & 2y - 5x = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & y - 2x = 7 \\ & y = 2x + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & 3y - 2x = 6 \\ & 4x - 6y = -12 \end{aligned}$$

### **Método de Sustitución**

Este método consiste en sustituir el valor de una de las variables en la ecuación restante.

Ejemplo : Resolver  $x + y = 2$   
 $x = y + 4 = 3$

$$1) \quad x + y = 2$$

$$2) \quad x = y + 4$$

sustituyendo 2 en 1:

$$y + 4 + y = 2$$

$$2y + 4 = 2$$

$$2y = -2$$

$$y = -1$$

entonces:

$$x = y + 4$$

$$x = -1 + 4 = 3$$

**La solución es  $(x, y) = (3, -1)$**

**Observación:** De igual forma se puede despejar  $y$  para resolver el sistema.

Resolver los siguientes sistemas por sustitución.

$$\begin{aligned} 1) \quad x &= -6 - 4y \\ 2x - 3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y + 2x &= 5 \\ y &= 5 - \frac{5}{2}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad y - 2x &= 7 \\ y &= 2x + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad 3y - 2x &= 6 \\ x &= -3 + \frac{3}{2}y \end{aligned}$$

### **Método de suma**

Este método resulta específicamente útil cuando las dos ecuaciones están en la forma  
consiste en eliminar a través de una suma alguna de las variables.

$$AX + BY = C,$$

Ejemplo, resolver:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x - 2y &= 1 \end{aligned}$$

Sumando directamente;  $4x = 6$   
 $x = 3/2$

entonces

$$\begin{aligned} 2y &= 5 - x \\ y &= \frac{1}{2} \left( 5 - \frac{3}{2} \right) \\ y &= \frac{1}{2} \left( \frac{7}{2} \right) = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\text{La solución es } (x, y) = \left[ \frac{3}{2}, \frac{7}{4} \right]$$

Ejemplo , resolver :  $2x + y = 1$

$$-x + y = 2$$

a)  $2x + y = 1$

b)  $-x + y = 2$

multiplicando ( b ) por ( - 1 )  $2x + y = 1$   
 $x - y = - 2$

sumando  $\Rightarrow 3x = - 1$   
 $x = - 1/3$

entonces:

$$2x + y = 1$$

$$2\left(-\frac{1}{3}\right) + y = 1$$

$$-\frac{2}{3} + y = 1$$

$$y = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

La solución es  $(x, y) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Resolver los sistemas de ecuaciones por el método de suma.

1)  $x + 4y = - 6$   
 $2x - 3y = - 1$

2)  $y + 2x = 5$   
 $2y - 5x = 10$

3)  $y - 2x = 7$   
 $y - 2x = 8$

4)  $3y - 2x = 6$   
 $4x - 6y = - 12$

5)  $x + y = 5$   
 $2x - y = 4$

6)  $3x - 3y = 6$   
 $3x + 3y = 0$

## UNIDAD IV. TRIGONOMETRIA

La palabra trigonometría significa medición de triángulos. Tal medición se hace mediante razones trigonométricas que también son llamadas funciones trigonométricas. A medida que se ha ampliado el campo de las matemáticas y sus aplicaciones, las razones trigonométricas juegan un papel importante tanto en la teoría como en la práctica. Las relaciones trigonométricas están presentes en coordenadas rectangulares en las cuales encontramos las ideas de distancia, segmentos rectilíneos dirigidos y ángulos.

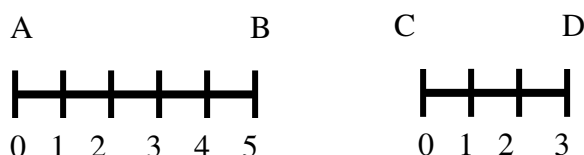
### Segmento Rectilíneo Dirigido

Un segmento de línea recta comprendido entre dos puntos. Tomando a uno como punto inicial y otro como punto final, entenderemos que el segmento de línea tiene longitud y dirección. La longitud se mide en las siguientes unidades: centímetros, milímetros, metros, millas, pie, pulgadas, etc.

Usaremos términos como positivo y negativo para designar direcciones. Trabajaremos con rectas tanto horizontales como verticales graduándolas de  $(-\infty, 0)$  y de  $(0, \infty)$  tomado la dirección como positiva hacia la derecha y negativa hacia la izquierda en la recta horizontal, y en la vertical, como positiva hacia arriba y negativa hacia abajo.

### Ejemplo:

Determinar  $\overline{AB} + \overline{CD}$ , usando la siguiente figura:



**Solución :** La línea superior de AB y de CD significa distancia, entonces

$$\overline{AB} + \overline{CD} = ?$$

$$\overline{AB} = 5 \text{ unidades}$$

$$\overline{CD} = 3 \text{ unidades}$$

$$\text{entonces } \overline{AB} + \overline{CD} = 5u + 3u$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 8u$$

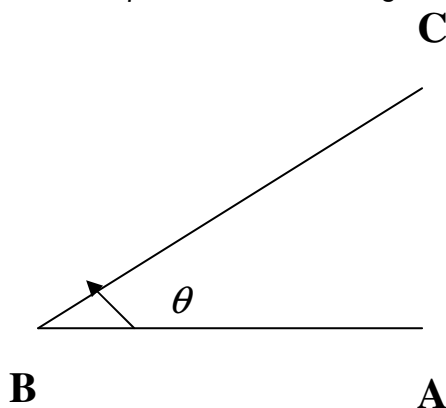
### Ángulos Positivos y Negativos

Un ángulo se genera por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo perteneciente a un rayo estacionario. Se toma a éste como lado inicial del ángulo, el rayo que se está moviendo como lado final y el punto como vértice.

Si la dirección de la rotación es opuesta a las manecillas de reloj se toma al ángulo positivo y en caso contrario será negativo.

Las unidades en que se miden los ángulos son en grados y los radianes. Para su representación se usan las letras del alfabeto griego tales como  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\phi$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ...

Todo lo anteriormente mencionado se puede observar en la siguiente figura:



BA lado inicial ( rayo estacionario)

BC lado final (rayo móvil)

$\theta$  Ángulo positivo

B vértice

Enseguida presentaremos la relación que existe entre las unidades de medida angular empleadas con mas frecuencia : Grados y Radianes . Con mucha frecuencia usaremos la llamada regla de tres, es decir, conocidas tres cantidades encontrar una cuarta cantidad.

### Grado

El grado es un ángulo tal que si su vértice se coloca en el centro del círculo intercepta un arco cuya longitud es igual a  $1/360$  de la circunferencia, este se divide en 60 minutos y el minuto en 60 segundos.



## Radian

Un radian es un ángulo tal que su vértice se coloca en el centro de un círculo intercepta un arco cuya longitud es igual al radio del círculo.

## Relaciones entre Grados y Radianes.

La longitud de la circunferencia es  $2\pi$  veces el radio, lo cual significa que la circunferencia contiene un ángulo central de  $360^\circ$ , por consiguiente:

$$2\pi \text{ radianes} = 360^\circ \quad \text{ó} \quad \pi \text{ radianes} = 180^\circ$$

Con lo anterior se puede observar que  $S = \theta r$ .

Donde:  $S =$  es la longitud del arco.

$\theta =$  es el ángulo medio en radianes.

$r =$  es el radio de la circunferencia.

Con estos resultados se puede expresar cualquier cantidad de grados a radianes y de radianes a grados.

## Ejemplo 1.

Transformar  $40^\circ$  a radianes.

**Solución:** Usando la regla de tres (acomodando en columna grados con grados y radianes con radianes), y el resultado de que  $\pi \text{ rad} = 180^\circ$  tenemos que:

$$\begin{array}{l} \pi \text{ rad} = 180^\circ \\ x \text{ rad} = 40^\circ \end{array}$$

de lo cual resulta:  $x = \frac{(40 \text{ grados})(\pi \text{ rad})}{180 \text{ grados}}$

$$x = \frac{(40)(\pi \text{ rad})}{180}$$

$$x \approx 0.6981317$$

**Ejemplo 2.**

Transformar  $\frac{3}{4}$  radianes a grados.

$$\begin{aligned} \pi \text{ rad} &= 180^\circ \\ \frac{3}{4} \text{ rad} &= x \end{aligned}$$

de lo cual resulta:  $x^\circ = (\frac{3}{4} \text{ radianes}) \cancel{(180 \text{ grados})}$

$\pi \text{ radianes}$

$$x^\circ = \frac{(\frac{3}{4})(180 \text{ grados})}{\pi}$$

$\pi$

$$x^\circ \approx 42.971835 \text{ grados.}$$

**Ejemplo 3.**

En un círculo de 6.5 cm. de radio, calcular la longitud del arco interceptado por un ángulo central de  $40^\circ$ .

**Solución :** Como  $S = \theta r$  y del ejemplo 1 tenemos que  $40^\circ \approx 0.6981$  radianes entonces:  
 $S = (0.6981)(6.5) \approx 4.5376 \text{ cm.}$

**Ejercicios**

1.- Transformar de grados a radianes.

- |                |                 |
|----------------|-----------------|
| a) $30^\circ$  | e) $-150^\circ$ |
| b) $765^\circ$ | f) $-75^\circ$  |
| c) $330^\circ$ | g) $72^\circ$   |
| d) $45^\circ$  | h) $80^\circ$   |

2.- Transformar de radianes a grados.

- |                      |                     |
|----------------------|---------------------|
| a) $-\frac{\pi}{12}$ | e) 1.5              |
| b) $-\frac{7\pi}{2}$ | f) $\frac{5\pi}{6}$ |
| c) $\frac{\pi}{5}$   | g) $\frac{2\pi}{9}$ |

d) 2

h)  $0.6\pi$

3.- Use el plano cartesiano para determinar él o los cuadrantes en el que esta el ángulo y grafíquelo.

a)  $300^\circ$

e)  $\frac{11\pi}{6}$

b)  $135^\circ$

f)  $-550^\circ$

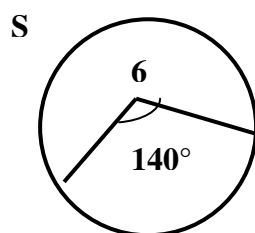
c)  $250^\circ$

g)  $\frac{2\pi}{3}$

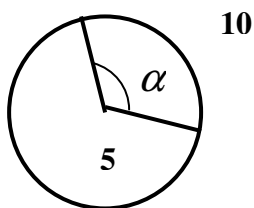
d)  $\frac{3\pi}{4}$

h)  $\frac{\pi}{4}$

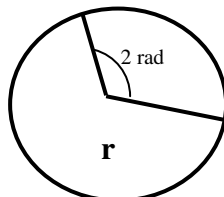
4.- Encuentre la longitud del arco S de la figura.



5.- Encuentre el ángulo  $\alpha$  en grados de la figura.

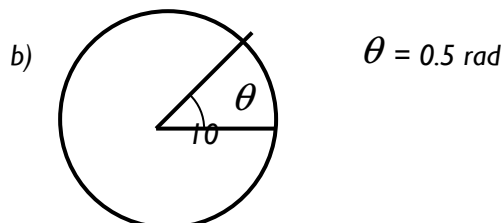
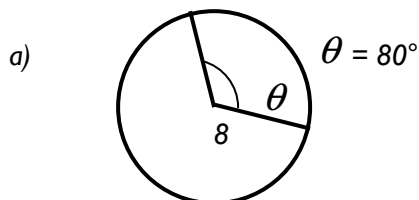


6.- Determine el radio del siguiente círculo.

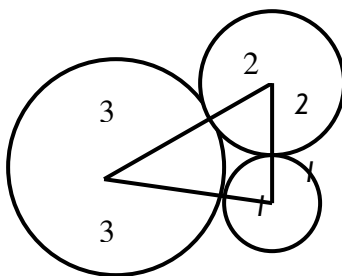


7.- Un ángulo central  $\theta$  de un círculo de 5 m de radio subtiene un arco de longitud de 6 m  
¿Cuál es la medida de  $\theta$ , en grados y en radianes?

- 8.- Pittsburg y Miami se localizan en el mismo meridiano (aprox.) Si Pittsburg tiene una longitud de  $40.5^\circ$  N, encuentre la distancia entre estas ciudades, ( el radio de la tierra es de 3960 millas ).
- 9.- Encuentra el área de un sector circular con un ángulo central de  $60^\circ$  y radio de 10 m
- 10.- Encuentra el área del sector que se muestra en la figura .



11.- Los tres círculos de radio 1, 2, 3 cm, son exactamente tangentes uno a otro como se muestra en la figura. Encuentre el área del sector circular de radio 1 delimitado por los segmentos de línea que unen el centro del círculo a los centros de los otros.

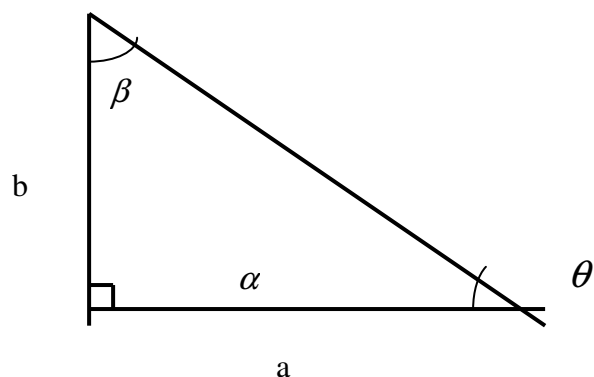


### Triángulos Rectángulos

Aplicaremos la trigonometría a la resolución de triángulos rectángulos. Se indicara como calcular los elementos desconocidos de un triángulo rectángulo cuando se conoce uno de sus lados y cualquier otro elemento. También trataremos los triángulos en los cuales se conocen dos lados y queremos conocer el tercero. Iniciaremos con el segundo caso.

Los ángulos de un triángulo rectángulo los representaremos por las letras  $\alpha, \beta, \theta$ .

Siendo  $\alpha$  el vértice del ángulo recto y usaremos las letras  $a, b, c$  para representar los lados del triángulo tomando a " $c$ " como la hipotenusa.

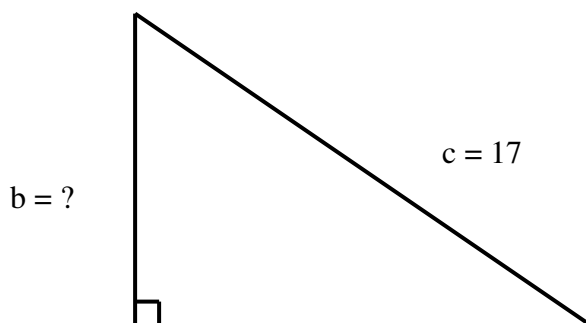


Si conocemos dos de los lados del triángulo y se quiere conocer el tercero usaremos el Teorema de Pitágoras. La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

$$C^2 = a^2 + b^2 \text{ ó } C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### Ejemplo :

Encuentra la longitud del lado que falta del siguiente triángulo.



**Solución:** Como  $C^2 = a^2 + b^2$  y lo que da  $a = 10$  es uno de los catetos, despejamos  $b$  y tenemos:  $b^2 = a^2 - c^2$  ó  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Sustituyendo  $b = \sqrt{(17)^2 - (10)^2}$

$$b = \sqrt{289 - 100}$$

$$b = 13.7477$$

Para la resolución de los triángulos rectángulos en los cuales se conoce uno de sus lados y cualquier otro elemento, usaremos las relaciones trigonométricas definidas de la siguiente manera:

$\angle = \text{ángulo}$

$$\text{sen } \angle = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cot } \angle = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{cat. opuesto}}$$

$$\text{cos } \angle = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

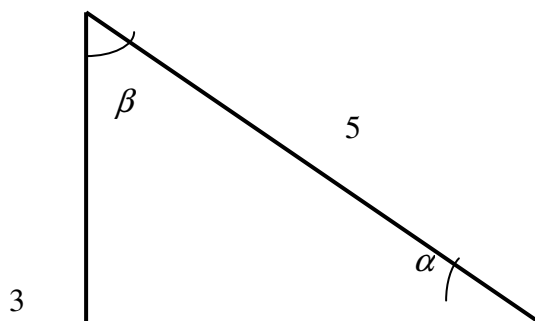
$$\text{sec } \angle = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. adyacente}}$$

$$\text{tan } \angle = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. Adyacente}}$$

$$\text{csc } \angle = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cat. opuesto}}$$

**Ejemplo:**

Determinar  $\text{sen } \alpha$  y  $\text{tan } \beta$



**Solución:** Utilizando las relaciones anteriores tenemos que :

$$\text{sen } \angle = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tan } \angle = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. Adyacente}}$$

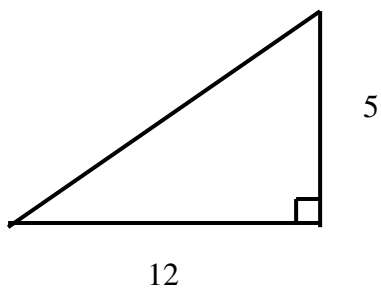
$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{tan } \beta = \frac{4}{3}$$

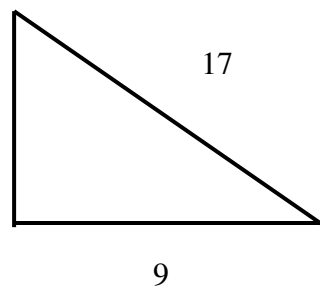
**Ejercicios:**

1.- Encuentra la longitud del lado que falta en las siguientes figuras:

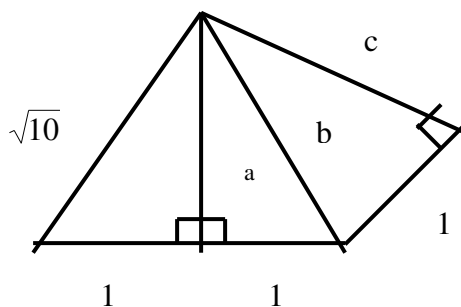
a)



b)

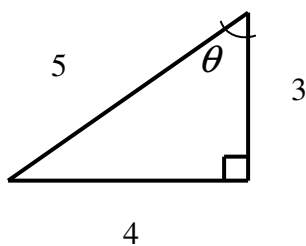


2.- Encuentra  $a$ ,  $b$  y  $c$  en la siguiente figura.

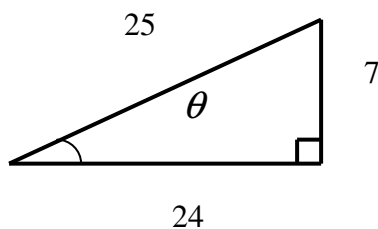


3.- Determine las seis razones trigonométricas del ángulo  $\theta$  en los siguientes triángulos.

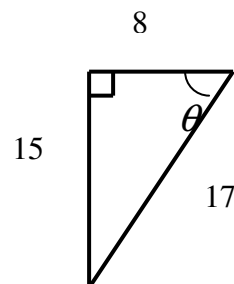
a)



b)



c)



4.- Dadas las siguientes razones trigonométricas determinar las otras cinco razones de  $\theta$ .

a)  $\text{Sen } \theta = \frac{3}{5}$

d)  $\text{Csc } \theta = \frac{13}{12}$

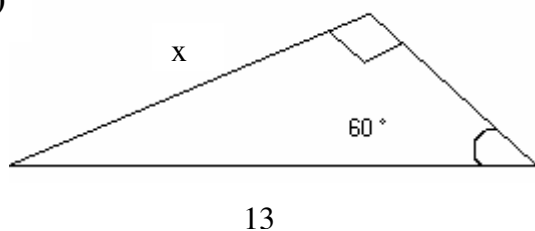
b)  $\text{Cot } \theta = 1$

e)  $\text{Tang } \theta = \sqrt{3}$

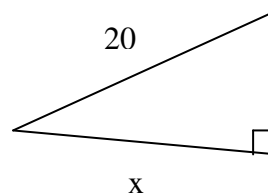
c)  $\text{Tan } \theta = \frac{a}{b}$

5.- Encuentre la incógnita  $x$  y de su respuesta con cinco decimales ( en caso necesario)

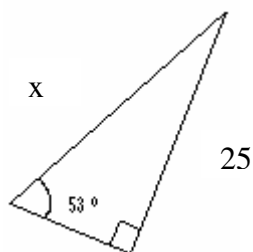
a)



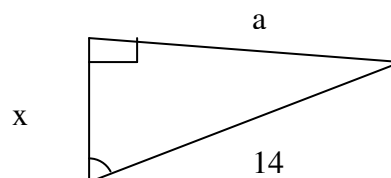
b)



c)

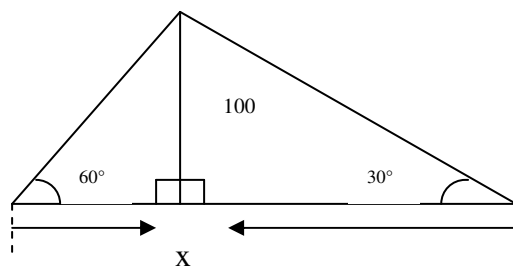


d)



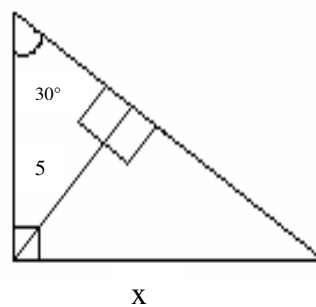
6.- Encuentre el valor de  $x$  con una cifra decimal

a)

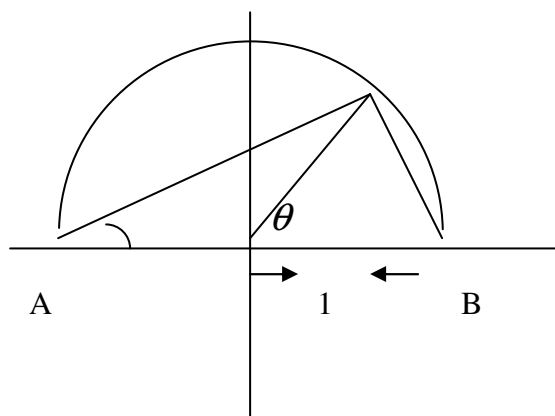


b)

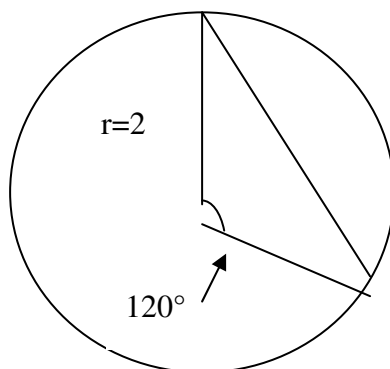




7.- Apoyándose en la figura muestre que  $\text{Sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta$ .



8.- Encuentre el área de la región sombreada en la siguiente figura.

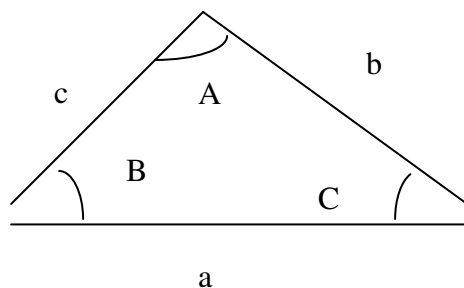


### Triángulos Oblicuángulos

En la física y en la Ingeniería frecuentemente se encuentran problemas en los que intervienen Triángulos Oblicuángulos y un Triángulo queda resuelto cuando se conoce sus lados, ángulos y área. Para resolver un triángulo es necesario conocer tres elementos siendo por lo menos uno de ellos un lado. Enseguida mencionaremos algunas expresiones útiles para este propósito.

#### Ley de los Senos

En un triángulo cualquiera las razones obtenidas al dividir cada lado por el seno del ángulo son iguales ( ver figura).



$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

#### Ley de los Cósenos

El cuadrado de un lado cualquiera de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos. De la figura anterior se tienen que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

### Ejemplo

Dadas  $a = 20$   $b = 30$   $C = 23^\circ$  Determinar el valor de lado  $c$

**Solución:** Mediante la ley de los cósenos, se tiene que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = (20)^2 + (30)^2 - 2(20)(30)\cos(23^\circ)$$

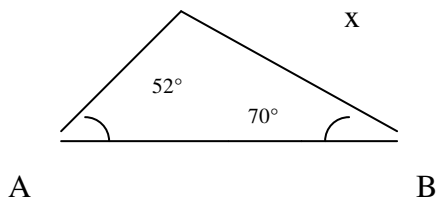
$$c^2 = 400 + 900 - 1200(0.9205)$$

$$c = 14$$

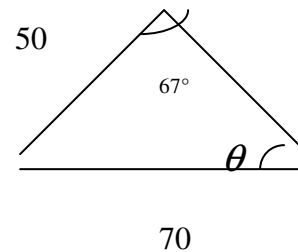
### Ejercicios

1) Use la ley de los senos para encontrara el lado o el ángulo que se indica

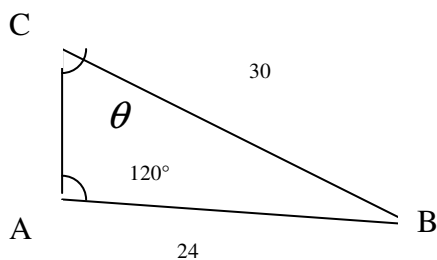
a)



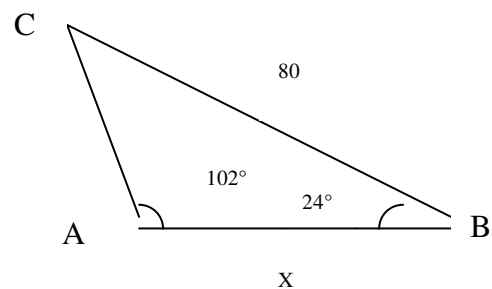
b)



c)



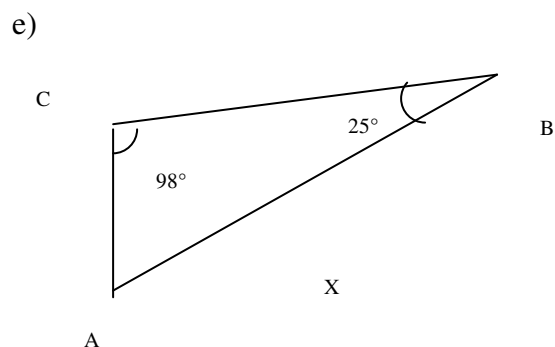
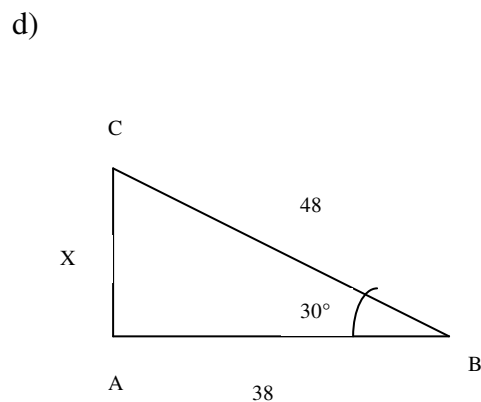
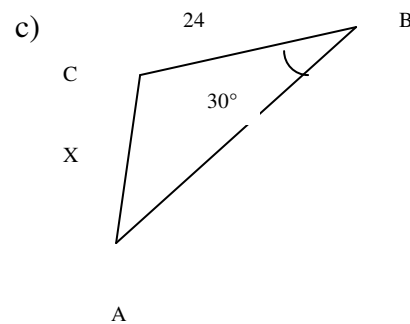
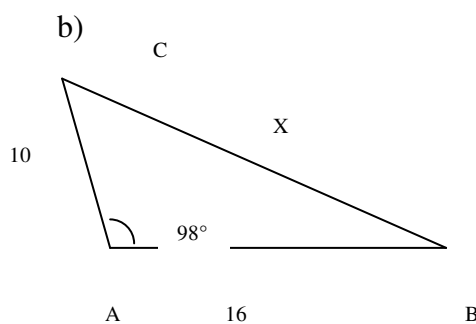
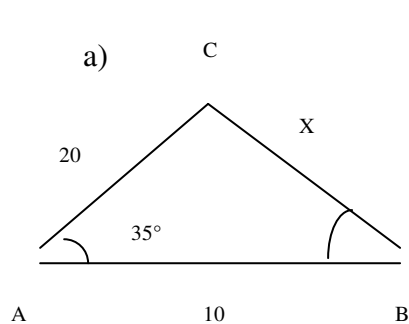
d)



2) Con la información dad trace cada triángulo y resuélvalo.

- a)  $\sphericalangle A = 50^\circ$        $\sphericalangle B = 68^\circ$        $c = 230$   
 b)  $\sphericalangle A = 23^\circ$        $\sphericalangle B = 110^\circ$        $c = 50$   
 c)  $\sphericalangle A = 22^\circ$        $\sphericalangle B = 95^\circ$        $a = 420$   
 d)  $\sphericalangle B = 10^\circ$        $\sphericalangle C = 100^\circ$        $c = 115$

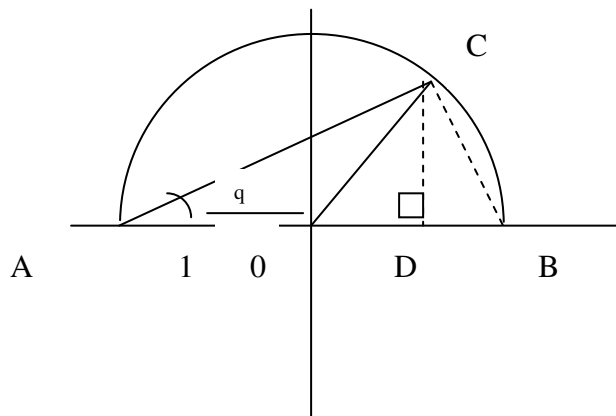
3) Use la ley de los cósenos para determinar el lado o el ángulo.



4) Deduzca las entidades con la ayuda de la siguiente figura..

$$a) \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$b) \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

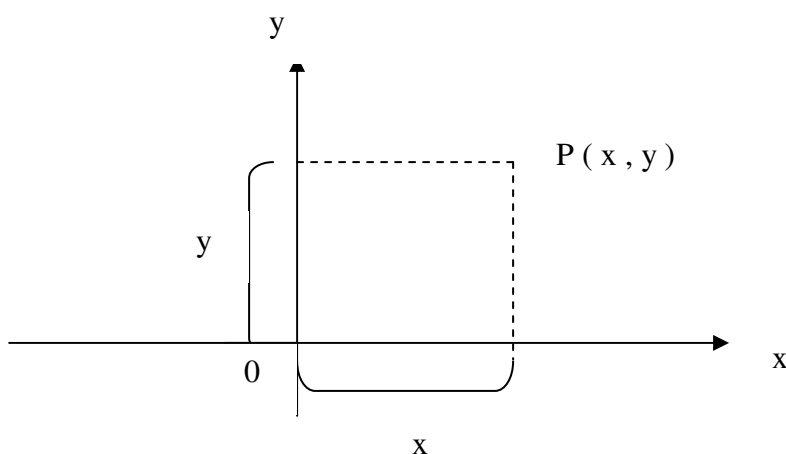


## UNIDAD V. GRAFICACIÓN DE FUNCIONES

### I.- NOCIONES BASICAS

#### I.- El plano cartesiano

Si trazamos dos rectas perpendiculares, una de ellas horizontal y la otra vertical llamamos  $O$  su punto de intersección y a la recta horizontal eje  $x$  y al vertical eje  $y$ , tenemos así un sistema de coordenadas. A cada punto del plano lo identificaremos como una pareja de números  $P(x, y)$  y a cada pareja de numero reales lo identificaremos con un punto único del plano.



#### Ejercicios:

Dibuje los siguientes puntos en el plano cartesiano

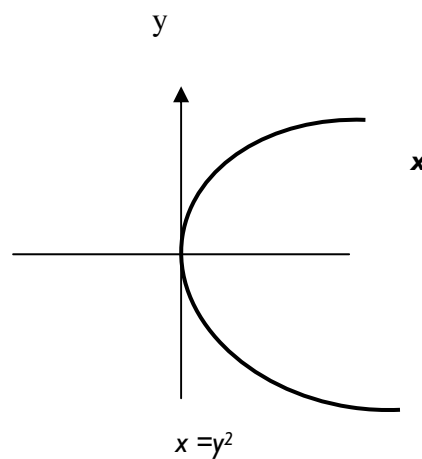
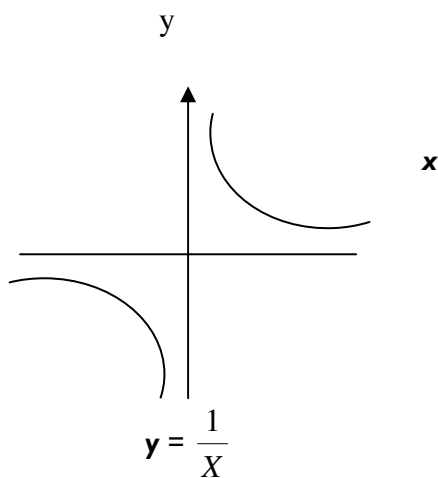
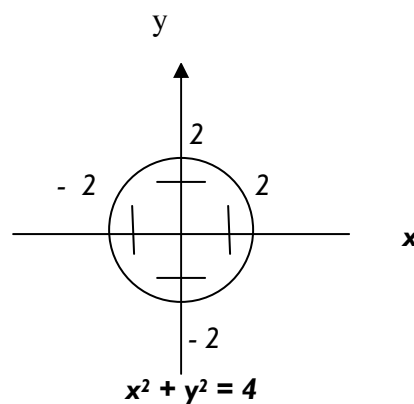
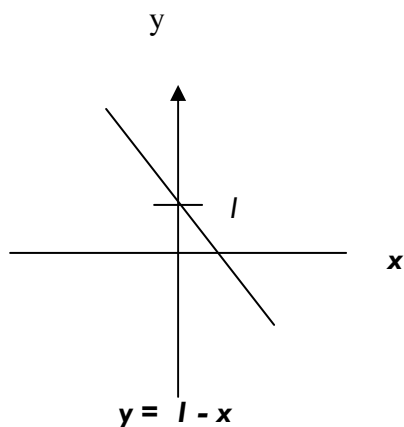
- |              |               |               |
|--------------|---------------|---------------|
| a) $(0, 3)$  | e) $(-8, -2)$ | i) $(a, -b)$  |
| b) $(3, 0)$  | f) $(0, -4)$  | j) $(-a, b)$  |
| c) $(-1, 7)$ | g) $(1, 9)$   | k) $(-a, -b)$ |
| d) $(5, -3)$ | h) $(-2, -6)$ |               |

#### 2.- Relaciones y sus graficas

Una relación es cualquier subconjunto del plano. Su representación geométrica consiste de los puntos del plano que satisface tal relación, así:

**DEFINICIÓN:** La grafica de una relación es el lugar geométrico de los puntos del plano que satisfacen la preposición que define la relación.

**Ejemplo :** De relación y sus graficas



**Ejercicios:**

Mediante tabulación grafique las siguientes relaciones.

a)  $2x + 3y = 1$

b)  $x^2 - y^2 = 1$

c)  $x = 1 - y^2$

d)  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$

e)  $(x + 1)(y - 1) = 2$

f)  $y = x^3 - 2x$

**3.-El concepto de Función.**

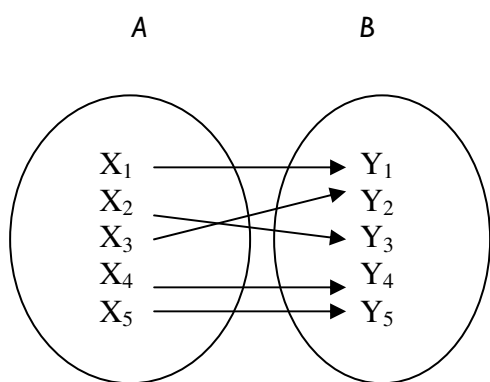
Una función es un tipo muy especial de relación

**DEFINICIÓN :** Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  y una ley de correspondencia que asocia a cada  $X \in A$  un único  $Y \in B$ , decimos que tenemos definida una función de  $A$  en  $B$ .

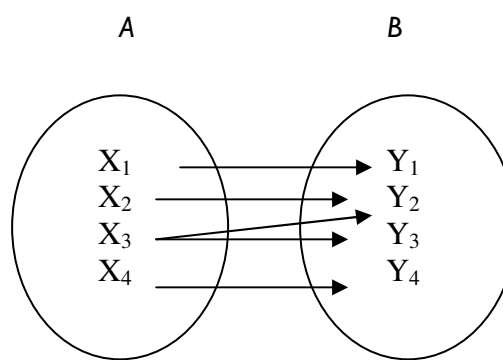
( $f: A \rightarrow B$ ).

Al conjunto  $A$  le llamaremos **el dominio** de la función y al conjunto  $B$  le llamaremos **el contra dominio**.

**Ejemplo :** Determinar si las siguientes relaciones son o no funciones.



**Solución:** Si es función porque a cada elemento de “ $x$ ” que pertenece a  $A$  ( $x \in A$ ) le corresponde solo un elemento “ $y$ ” que pertenece a  $B$  ( $y \in B$ )



**Solución:** No es función porque hay un elemento  $x \in A$  al cual le corresponde **dos elementos**  $y \in B$ .

En matemáticas ( Cálculo específicamente ) nos interesa estudiar el caso en el que tanto  $A$  como  $B$  están formados por números reales.

Se acostumbra denotar a “ $y$ ” como “ $f(x)$ ” y entendemos que la función esta dada con solo expresar la regla de correspondencia con la “ $y$ ” despejada.

**Ejemplos:**

a)  $y = x$                       ó                       $f(x) = x$   
b)  $y = 5$                       ó                       $f(x) = 5$

c)  $y = x^2$                       ó                       $f(x) = x^2$   
d)  $y = x^3$                       ó                       $f(x) = x^3$

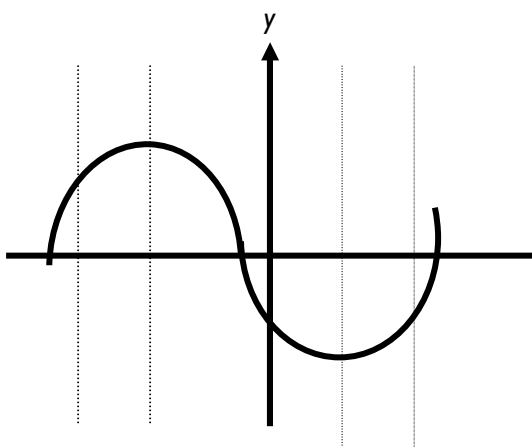


### 3.1. Identificación geométrica de una función.

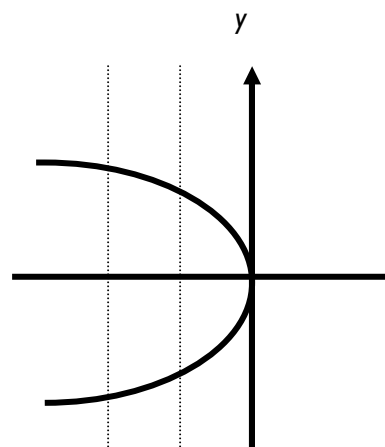
Una manera geométrica de identificar si una relación es función es la siguiente :

Dada una grafica, para saber si es una función es necesario que toda recta vertical (paralela al eje “ y ”) que se trace intercepte a dicha grafica **a lo mas en un punto**.

**Ejemplos:**



**Si es función** porque cada recta vertical intercepta en **un solo punto** a la gráfica



**No es función** porque cada recta vertical intercepta la gráfica en **dos puntos**.

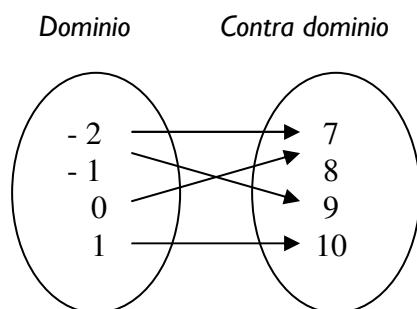
### 3.2 . Identificación algebraica de una función.

La manera algebraica de distinguir entre una relación cualquiera y una función es que si tenemos la expresión analítica, para cada valor que sustituyamos en la variable “x”, el valor que obtenemos para “y” ó  **$f(x)$**  es **único**.

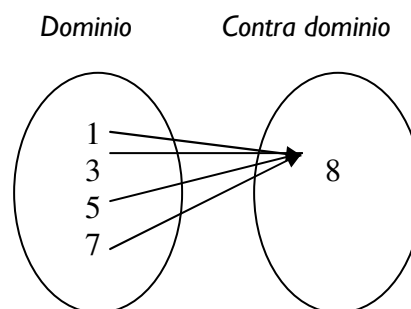
**Ejemplos:**

I.- Indique si las siguientes relaciones en forma de conjunto son o no funciones. Explique su respuesta en cada caso.

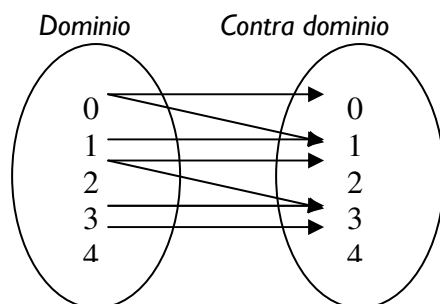
a)



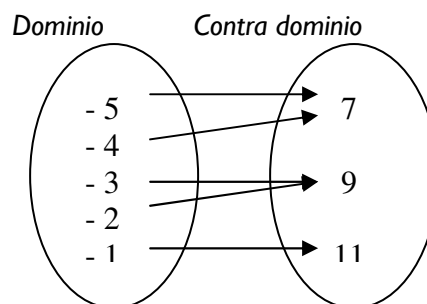
b)



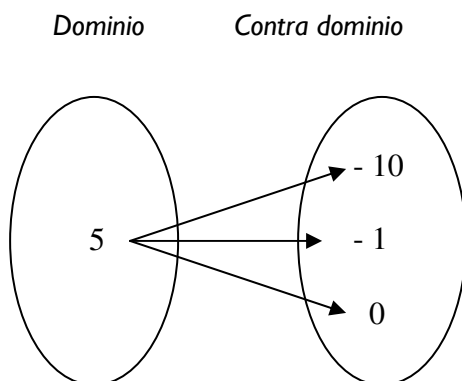
c)



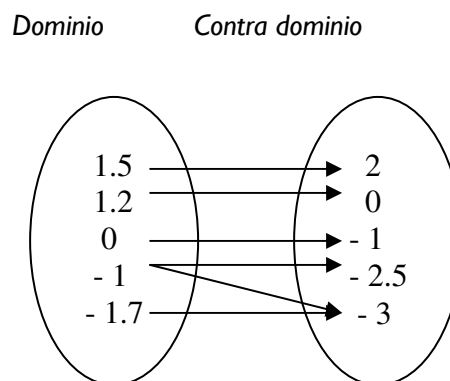
d)



e)

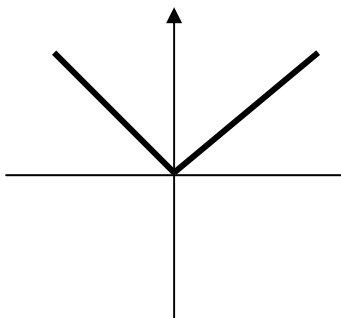


f)

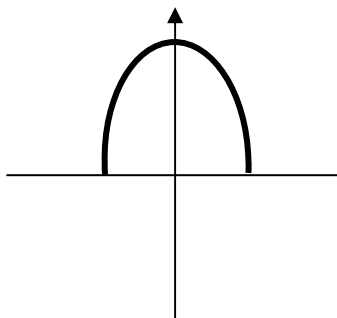


2.- Determine si las siguientes graficas representan o no una función  $y = f(x)$

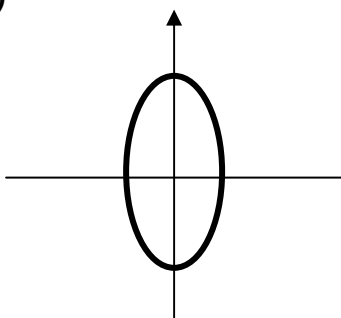
a)



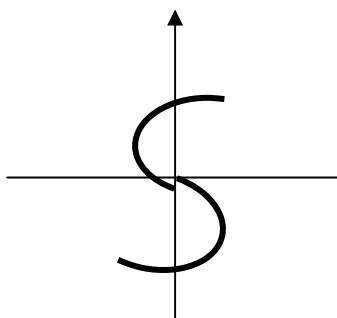
b)



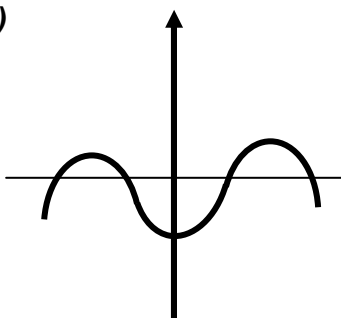
c)



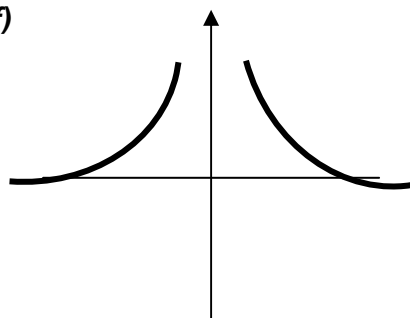
d)



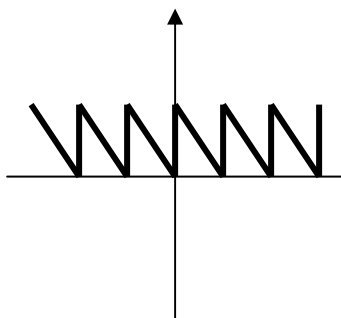
e)



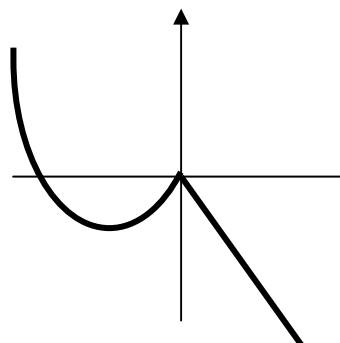
f)



g)



h)



3.- Considere las siguientes expresiones e indique cuales son funciones. Explique su respuesta en cada caso.

a)  $y = x + 7$

d)  $y = |x + 10|$

g)  $14x^2 + y^2 = 25$

b)  $-x + y = 5$

e)  $y - x^2 = -3$

h)  $y = \frac{x+9}{x-5}$

c)  $-x^2 - y^2 = 1$

f)  $y = \sqrt{x-6}$

i)  $y = \frac{1}{x} \sqrt{x}$

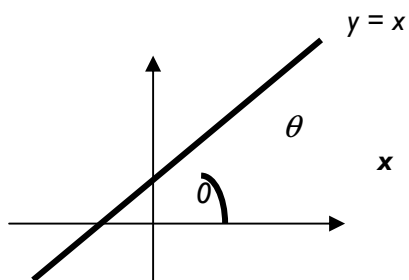
## II.- GRAFICACIÓN DE FUNCIONES (SIN CALCULO)

### I.- Rectas.

La grafica de la función identidad  $f(x) = x$ , representa una recta que pasa por el origen

$(0, 0)$  con un ángulo de inclinación  $\theta = \frac{\pi}{4}$  respecto al eje  $x$ . (ver fig. 1)

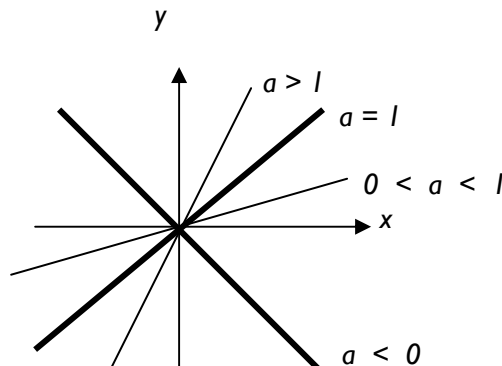
y



( fig. 1 )

Si a esta función le agregamos una constante “a” como factor, es decir,  $f(x) = ax$ , y consideramos que “a” es cualquier número real, entonces esta última función representa gráficamente la familia de todas las rectas que pasan por  $(0, 0)$  y el caso  $a = 1$  es la función identidad.

En la fig. 2 se representan los casos correspondientes a los valores que toma el parámetro “a”.



( fig. 2 )

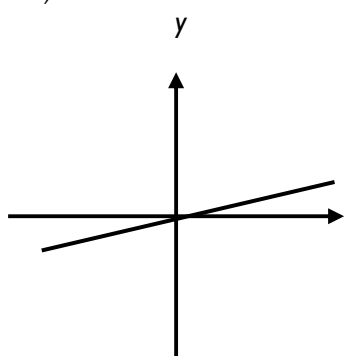
Si  $0 < a < 1$ , la recta varía su inclinación en el intervalo  $0 < \theta < \pi/4$ ; si  $a > 1$ , la recta varía su inclinación en el intervalo  $\pi/4 < \theta < \pi/2$ ; si  $a < 0$  la recta varía su inclinación en el intervalo  $\pi/2 < \theta < \pi$ .

Así, todas las rectas que pasan por el origen tienen la forma  $f(x) = ax$  y su inclinación depende del parámetro “a”.

**Ejemplos:** Graficas las rectas a)  $f(x) = 1/2x$  b)  $y = 3x$  c)  $f(x) = -5x$

**Soluciones:**

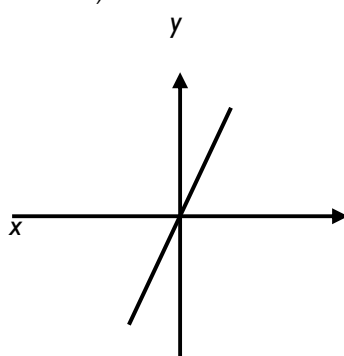
a)



$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

$$a = \frac{1}{2}, 0 < a < 1$$

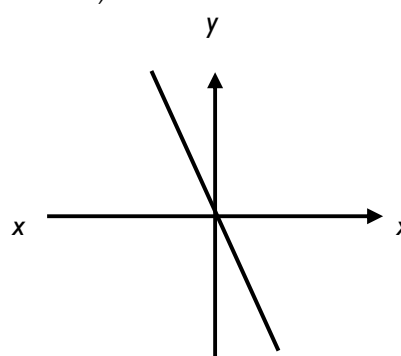
b)



$$f(x) = 3x$$

$$a = 3, a > 1$$

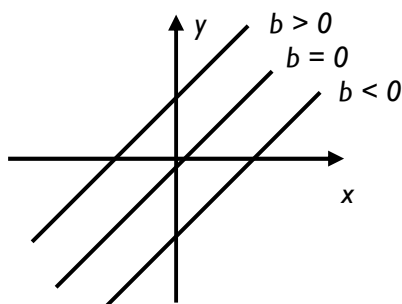
c)



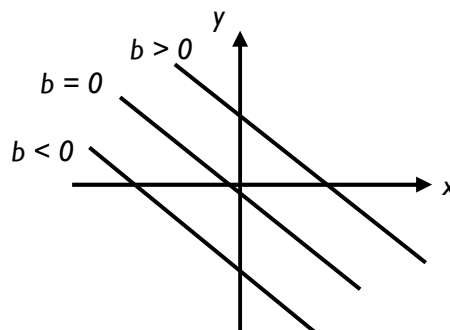
$$f(x) = -5x$$

$$a = -5, a < 0$$

Ahora, si a la función  $f(x) = ax$  le sumamos una constante “b”, es decir,  $f(x) = ax + b$ , la gráfica de la recta se va a desplazar verticalmente (sobre el eje y); si “b” toma valores positivos ( $b > 0$ ), la función se desplaza hacia arriba; si “b” toma valores negativos ( $b < 0$ ), la función se desplaza hacia abajo; si  $b = 0$ , se tiene el caso  $f(x) = ax$  (ver fig. 3 y 4).



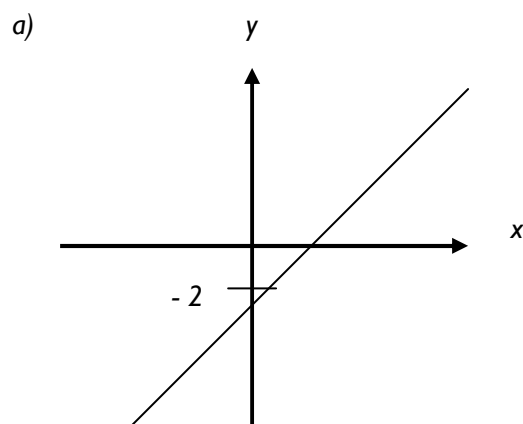
(fig. 3)  
 $f(x) = ax + b, b > 0$



(fig. 4)  
 $f(x) = ax + b, b < 0$

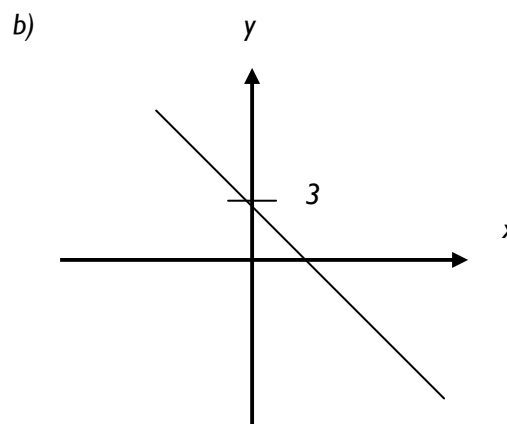
Si “ $b$ ”, al igual que “ $a$ ”, es cualquier número real. La función  $f(x) = ax + b$  representa gráficamente todas las rectas  $y = f(x)$  contenidas en el plano.

**Ejemplos:** Graficar las rectas a)  $f(x) = x - 2$  y b)  $y = -1/2x + 3$



$$f(x) = x - 2$$

$$a = 1, b = -2$$



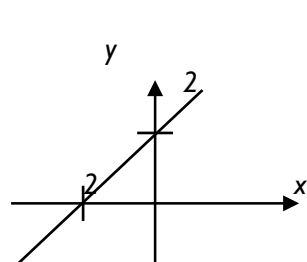
$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 3$$

Con estas estrategias podemos obtener una buena aproximación a la gráfica de cualquiera de las rectas dadas por  $y = f(x)$ , pero si se desea una gráfica más precisa, es necesario recordar que  $f(x) = ax + b$  es la llamada forma pendiente – ordenada al origen de la recta y que, precisamente “ $a$ ” es la pendiente.

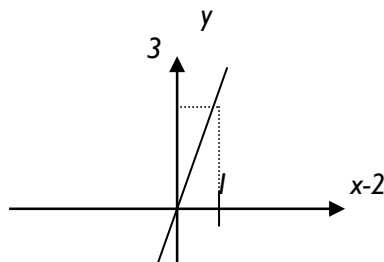
**Ejemplo 1** ( repaso de cálculo de pendientes )

¿Cuál es la pendiente de las siguientes rectas?



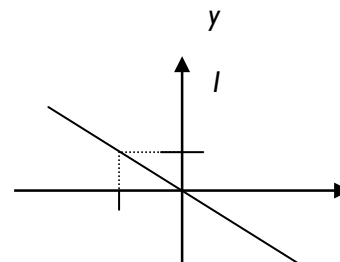
$$(a = 2/2)$$

La pendiente es  $a = 1$



$$(a = 3/1)$$

La pendiente es  $a = 3$

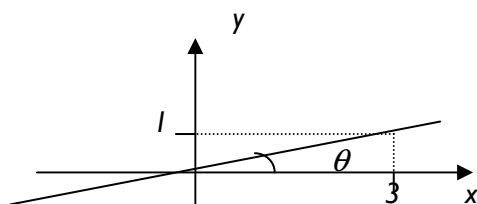


$$(a = 1/-2)$$

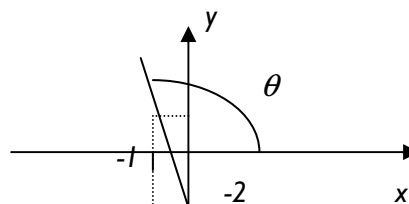
La pendiente es  $a = -1/2$

**Ejemplo 2.**

Graficar las rectas a)  $f(x) = 1/3$  y b)  $f(x) = -4x - 2$



Como  $0 < a < 1$  y  $b = 0$ , la recta pasa por  $(0,0)$  y  $0 < \theta < \pi/4$ . Además  $a = 1/3$



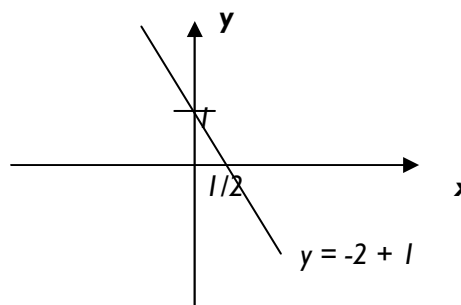
Como  $a < 0$  y  $b = -2$ , la recta corta al eje "y" en  $-2$  y  $\pi/2 < \theta < \pi$ . La pendiente es  $a = 4/-1$ , o sea  $a = -4$

Otra forma alternativa para graficar una recta consiste en encontrar los puntos en donde corta tanto al eje "y" como al eje "x", (recuerde que trazar una recta con conocer solo dos puntos por donde pase).

**Ejemplo:** Graficas la recta  $y = 2x + 1$

**Solución:**

Como  $b = 1$ , la recta se desplaza una unidad hacia arriba, que es precisamente el punto donde corta al eje y. Para calcular la raíz (punto donde corta al eje x) se hace  $f(x) = 0$ , o sea  $0 = -2x + 1$ , de aquí que  $x = 1/2$ .



**Ejercicios:**

1.- Grafique las siguientes funciones.

a)  $y = 8x$

d)  $f(x) = 1/3x$

g)  $f(x) = -7x$

j)  $y = -1/4x$

m)  $y = 0.5$

b)  $y = -x - 1/2$

e)  $y = x + 7/5$

h)  $f(x) = -3/2x + 3$

k)  $f(x) = 4/5x - 9$

n)  $f(x) = 4$

c)  $f(x) = 10 - 6x$

f)

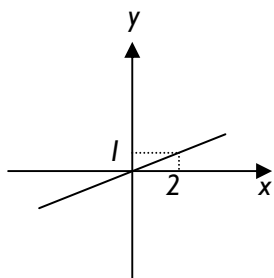
i)

l)  $f(x) = 15x + 13$

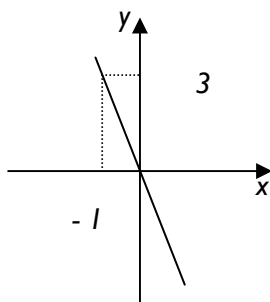
ñ)  $f(x) = 0 - 9/7$

2.- Determine la expresión funcional ( $y = f(x)$ ) que representa a cada una de las graficas siguientes.

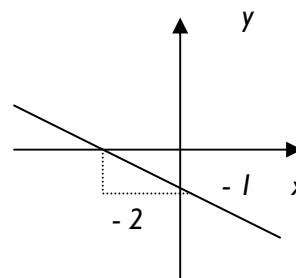
a)



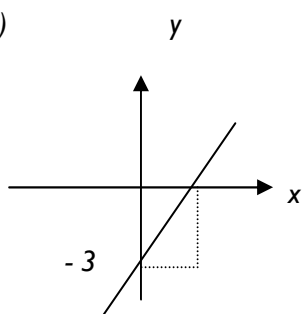
b)



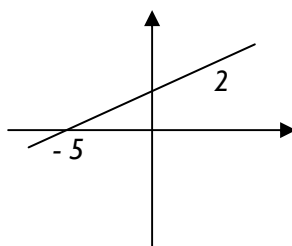
c)



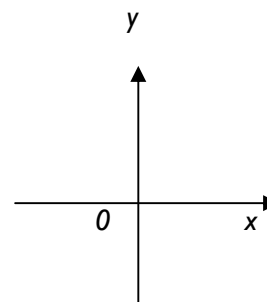
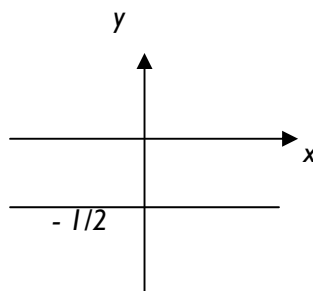
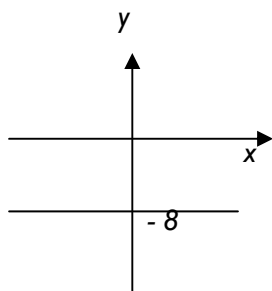
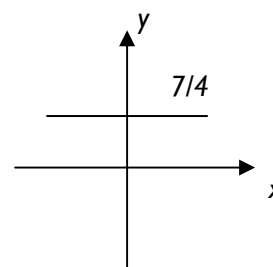
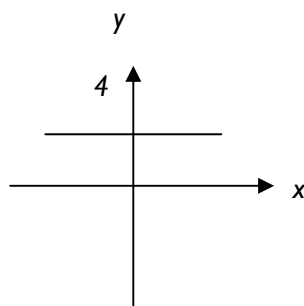
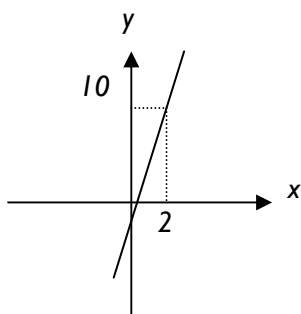
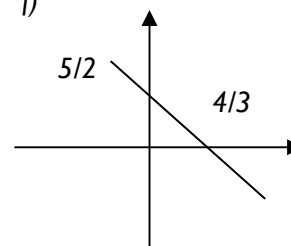
d)



e)



f)





3.- Determine la expresión analítica ( $y = f(x)$ ) de la recta que pasa por  $(-6, 4)$  y tiene pendiente  $-2/3$ .

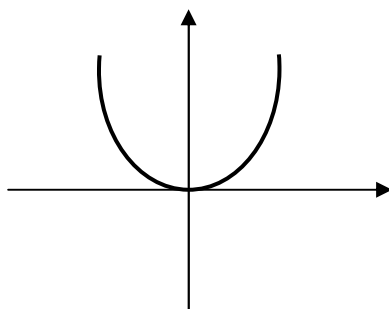
4. Si  $f(-1) = 3$  y  $f(3) = 0$  para  $f$  lineal (recta), encuentre la expresión analítica.

5. Encuentre  $f(x)$  lineal si su gráfica intercepta al eje  $x$  en  $-4/5$  y al eje  $y$  en  $1/2$

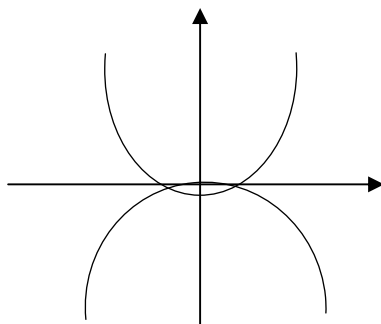
6. Encuentre  $f(x)$  lineal si su gráfica intercepta al eje  $y$  en  $-7$  y al eje  $x$  en  $-1/3$

## 2. Parábolas

Considerando ahora la función  $f(x) = x^2$ ; gráficamente representa una parábola con vértice  $v(0,0)$  y que “abre” hacia arriba (ver fig. 5)



Si agregamos “ $a$ ” como factor de esta función o sea  $F(x) = ax^2$ , el efecto que se produce es el siguiente: Si  $a > 0$ , la parábola abre hacia arriba; si  $a < 0$ , abre hacia abajo; si  $|a|$  “crece”, la parábola se “cierra”, si  $|a|$  “decrece”, la parábola se “abre”. En todos estos casos el vértice permanece en  $(0,0)$ . (ver fig. 6).



De esta manera  $f(x) = ax^2$  representa gráficamente todas las parábolas que pasan por el origen y que, dependiendo del valor “ $a$ ”, es cerrada, abierta, abre hacia arriba o abre hacia abajo.

Ahora, si a esta función sumamos el parámetro “ $b$ ”, tenemos  $f(x) = ax^2 + b$ . El efecto que produce “ $b$ ” es el de desplazar verticalmente: Si  $b > 0$  se desplaza hacia arriba, si  $b < 0$  se desplaza, hacia abajo, si  $b = 0$  se tiene el caso de la función inicial. Así, la función  $f(x) = ax^2 + b$ , representa la familia de parábolas con vértice en el punto  $(0,b)$ . (ver fig. 7 y fig. 8)